Staatsexamen Didaktik Mathematik

(Lehramt, nicht-vertieft)

Frühjahr 2015

Julian Palme

(Stand: 5. März 2015)

Literatur

[Kra14a] Krauss, S.: *Didaktik der Algebra*. Regensburg, 2013/2014.

[Kra14b] Krauss, S.: *Didaktik der Geometrie*. Regensburg, 2013/2014.

[Kra14c] Krauss, S.: *Didaktik der Zahlbereiche*. Regensburg, 2014.

[Rei15] Reiss, K.: *Staatsexamen Didaktik der Mathematik*. München, 2014/2015. – Zugriff am 28.02.2015 unter https://www.ma.edu.tum.de/staatsexamina/staatsexamendidaktikmathematik/

[Rot15] Rothmeier, G.: *Examenskurs Didaktik der Mathematik (LARS)*. Regensburg, 2014/2015.

[RR96] Reich, G. ; Rothmeier, G.: *Thema Mathe 8*. Bamberg : C. C. Buchner Verlag, 1996.

[RR01] Reich, G. ; Rothmeier, G.: *Thema Mathe 5*. Bamberg : C. C. Buchner Verlag, 2001.

[RR02] Reich, G. ; Rothmeier, G.: *Thema Mathe 6*. Bamberg : C. C. Buchner Verlag, 2002.

[RR04] Reich, G. ; Rothmeier, G.: *Thema Mathe 7*. Bamberg : C. C. Buchner Verlag, 2004.

[RR06] Reich, G. ; Rothmeier, G.: *Thema Mathe 9*. Bamberg : C. C. Buchner Verlag, 2006.

[RR08] Reich, G. ; Rothmeier, G.: *Thema Mathe 10*. Bamberg : C. C. Buchner Verlag, 2008.

[Sta07] Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB): *Mathematik Jgst. 5 bis 10*. München, 2007. – Zugriff am 01.03.2015 unter https://www.isb.bayern.de/schulartspezifisches/lehrplan/realschule-r6/fachprofil-ebene-2/mathematik/705/

[WW15] Weigand, H. ; Weth, T.: *Examensvorbereitung Didaktik der Mathematik*. Würzburg, 2014/2015. – Zugriff am 28.02.2015 unter http://www.didmath.ewf.uni-erlangen.de/vhb/vhbdemo/Examenskurs/

Inhaltsverzeichnis

(1) Potenzen und Potenzfunktionen

(2) Exponential- und Logarithmusfunktionen

(3) Trigonometrie

(4) Abbildungen im Koordinatensystem

- mithilfe der Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck Streckenlängen berechnen
- Pfadregeln und ihre Anwendung

Inhalt der Jahrgangsstufe 9

(1) Systeme linearer Gleichungen
(2) Reelle Zahlen
(3) Quadratische Funktionen [VSE]
(4) Quadratische Gleichungen und Ungleichungen
(5) Systeme mit quadratischen Gleichungen
(6) Flächeninhalt ebener Vielecke
(7) Abbildung durch zentrische Streckung
(8) Flächensatz am rechtwinkligen Dreieck
(9) Berechnungen am Kreis
(10) Raumgeometrie
(11) Daten und Zufall

Jahrgangsstufe 10

Am Ende der Jahrgangsstufe 10 sollen die Schüler über folgendes Grundwissen verfügen:

- Potenzterme mithilfe der Potenzgesetze umformen
- Graphen und Eigenschaften von Potenzfunktionen mit $y = x^{\frac{m}{n}}$
- Graphen und Eigenschaften von Exponentialfunktionen und deren Umkehrfunktionen
- mithilfe der Definition des Logarithmus und der Benutzung des Taschenrechners Terme umformen und einfache Exponentialgleichungen lösen
- Definition von $\cos(\varphi)$, $\sin(\varphi)$ und $\tan(\varphi)$; Werte und Winkelmaße mithilfe des Taschenrechners ermitteln
- Seitenlängen und Winkelmaße im rechtwinkligen und im beliebigen Dreieck berechnen
- Skalarprodukt anwenden
- Koordinaten von Bild- und Urpunkten bei den bekannten Abbildungen berechnen sowie Gleichungen von Bildgraphen ermitteln
- Vektoren und 2×2-Matrizen verwenden

Inhalt der Jahrgangsstufe 10

- Schrägbilder von Körpern zeichnen
- Laplace-Wahrscheinlichkeiten ermitteln

Inhalt der Jahrgangsstufe 8

(1) Terme

(2) Lineare Gleichungen und Ungleichungen

(3) Bruchterme und Bruchgleichungen

(4) Funktionen [VSE]

(5) Lineare Funktionen [VSE]

(6) Funktionen der indirekten Proportionalität

(7) Dreiecke und Vierecke

(8) Grundlagen der Raumgeometrie

(9) Daten und Zufall

Jahrgangsstufe 9

Am Ende der Jahrgangsstufe 9 sollen die Schüler über folgendes Grundwissen verfügen:

- Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen lösen
- quadratische Gleichungen: Lösungsformel, Bedeutung der Diskriminante, Koordinaten der Schnittpunkte von Funktionsgraphen, Tangentialprobleme
- in der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen rechnen
- Definition der Quadratwurzel kennen und anwenden
- einfache Termumformungen mit Quadratwurzeln
- Graphen und Eigenschaften von quadratischen Funktionen, Scheitelform
- Gleichungen von Parabeln ermitteln, Parameterverfahren
- Flächeninhalte ebener Figuren insbesondere auch mithilfe zweireihiger Determinanten
- Umfang und Flächeninhalt von Kreisen, Mantel- bzw. Oberfläche und Volumen von Prismen, Pyramiden, geraden Kreiszylindern und Kreiskegeln sowie von Kugeln
- Abbildung durch zentrische Streckung anwenden
- Streckenlängen mit dem Vierstreckensatz bestimmen
- Berechnungen mithilfe von Vektoren
- Ähnlichkeit von Dreiecken

I Examenskurs nach [WW15]

1.1 Grundsätzliches

Es werden drei Themen zur Auswahl gestellt, wovon eines innerhalb von drei Stunden zu bearbeiten ist.

1.2 Standardformulierungen

1.2.1 Aufgaben zu mathematischen Begriffen

- Geben Sie eine Definition von ...
- Definieren Sie ...
- Erklären Sie ...
- Erläutern Sie ...

Erklärung

- verwendete Begriffe in einer Definition sind selbst zu definieren
- einwandfreie Definitionen bei *Erklärung* und *Erläuterung*
- *Erklärung* und *Erläuterung* enthalten neben der Definition des Begriffs
  - Verdeutlichung des Begriffinhalts
  - Abstecken des Begriffsumfangs
  - Aufzeigen von Beziehungen zu Ober-, Unter und Nachbarbegriffen

1.2.2 Aufgaben zu mathematischen Sätzen, Zusammenhängen und Verfahren

- Formulieren Sie ...
- Geben Sie ... an
- Beweisen Sie ...
- Zeigen Sie, dass ...
- Begründen Sie, dass ...
- Erklären Sie, dass ...
- Erläutern Sie, dass ...

Erklärung

- Begriffe verlangen
  - Formulierung eines Satzes ODER
  - Formulierung eines mathematischen Zusammenhangs ODER
  - Beschreibung eines mathematischen Verfahrens

  in korrekter mathematischer Fachsprache
- *Beweisen Sie ... / Zeigen Sie ...* verlangt exakte Durchführung eines mathematischen Beweises; Beweisschritte sind klar darzulegen
- *Begründen Sie ...* heißt, dass auch Mittel des anschaulichen und plausiblen Schließens zugelassen sind

- Punkt- und Vektorkoordinaten berechnen
- Winkelmaße mithilfe von Stufen- und Wechselwinkeln sowie Neben- und Scheitelwinkeln ermitteln
- Innenwinkelsumme im Dreieck
- geometrische Ortslinien beschreiben und zeichnen
- Umkreis und Inkreis eines Dreiecks
- Orthogonalität von Kreistangente und Zentrale durch den Berührpunkt
- Randwinkelsatz und Satz des Thales
- Interpretieren von Daten

Inhalt der Jahrgangsstufe 7

(1) Erweiterung des Zahlenbereichs: Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen

(2) Gleichungen und Ungleichungen

(3) Proportionalitäten

(4) Parallelverschiebung

(5) Drehung

(6) Lösung geometrischer Probleme mithilfe von Abbildungen

(7) Geometrische Ortslinien und Ortsbereiche

(8) Daten und Zufall

Jahrgangsstufe 8

Am Ende der Jahrgangsstufe 8 sollen die Schüler über folgendes Grundwissen verfügen:

- Terme durch Termumformung selbstständig vereinfachen und Extremwerte quadratischer Terme ermitteln
- lineare Gleichungen und Ungleichungen und deren Verknüpfungen lösen
- einfache Bruchgleichungen lösen
- Funktionsbegriff
- Geradengleichungen aufstellen und zu gegebenen Gleichungen Geraden zeichnen
- Dreiecke konstruieren
- die Kongruenz von Dreiecken nachweisen
- Eigenschaften besonderer Dreiecke und Vierecke

- Potenzbegriff kennen und anwenden
- Addition und Subtraktion in der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen
- Tabellen und Diagramme erstellen und auswerten
- Eigenschaften und die Abbildungsvorschrift der Achsenspiegelung kennen und daraus die Eigenschaften achsensymmetrischer Figuren ableiten
- Achsenspiegelung durchführen und erkennen
- Winkel messen und zeichnen
- relative Häufigkeiten berechnen

Inhalt der Jahrgangsstufe 6

(1) Erweiterung des Zahlenbereichs: Menge $\mathbb{Q}_0^+$ der positive rationalen Zahlen

(2) Rechnen mit positiven rationalen Zahlen

(3) Dezimalbrüche; Rechnen mit Dezimalbrüchen

(4) Gleichungen und Ungleichungen

(5) Direkte Proportionalität

(6) Erweiterung des Zahlenbereichs: Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen

(7) Grundbegriffe der ebenen Geometrie

(8) Achsenspiegelung

(9) Daten und Zufall

Jahrgangsstufe 7

Am Ende der Jahrgangsstufe 7 sollen die Schüler über folgendes Grundwissen verfügen:

- Grundrechenarten und Potenzgesetze in der Menge IQ der rationalen Zahlen
- Gleichungen und Ungleichungen der Form $ax + b \geqq c$ bzw. $ax + b \leqq c$ durch Äquivalenzumformungen lösen
- direkte und indirekte Proportionalitäten erkennen, darstellen und auswerten sowie fehlende Größen berechnen; Sachaufgaben lösen
- Prozent- und Zinsrechnung
- mit dem Koordinatensystem umgehen
- Eigenschaften von Kongruenzabbildungen
- Parallelverschiebung und Drehung anwenden

- *Erklären Sie …/Erläutern Sie …* verlangt über *Formulieren* hinaus
  - Verdeutlichung der Sätze, Zusammenhänge
  - Verfahren mittels geeigneter Beispiele, Skizzen, Veranschaulichungen oder Beschreibungen
  - KEINE Beweise

1.2.3 Aufgaben zur Methodik

- Zeigen Sie mögliche Zugänge zum Thema …auf
- Beschreiben Sie unterschiedliche Maßnahmen zum Thema …
- Beschreiben Sie (Schüler-)Aktivitäten, die zur Begriffsbildung …geeignet sind
- Erörtern Sie auftretende Fehler (und Lernschwierigkeiten) und Maßnahmen zu deren Vermeidung oder Behebung

Erklärung

- Beschreibung und evtl. Begründung des Sachverhaltes
- ggf. konkrete Beispiele anführen
- Wiedergabe in strukturierter Reihenfolge

1.2.4 Aufgaben zu Unterrichtszielen und deren Begründung

- Formulieren Sie Lernziele zum Thema …
- Formulieren und erläutern bzw. begründen Sie Ziele zum Thema …
- Erläutern Sie die Bedeutung des Themas …
- Konzipieren Sie eine Folge von Aufgaben zum Thema …

Erklärung

- Lehr- oder Lernziele in sinnvoller Gliederung: verschiedene Leistungsdimensionen
  - Produkt- und Prozessziele: Kenntnisse, Fähigkeiten, Fertigkeiten
  - Grob- und Feinziele: Unterteilung
  - etc.
- Begründung von Zielen und Diskussion der Bedeutung des Themas auf Basis didaktischer Argumente, z. B.
  - Bedeutung des Themas im mathematischen Umfeld, in anderen Gebieten der Mathematik oder auch in anderen Fächern
  - Bedeutung des Themas für Förderung allgemeiner mathematischer Fähigkeiten
  - Bedeutung des Themas für allgemeine kognitive Förderung der SuS
  - Bedeutung des Themas für positive Einstellung zur Mathematik
  - Bedeutung für Bewältigung von Aufgaben im späteren Berufs- und Alltagsleben der SuS

1.2.5 Aufgaben zu Unterrichtssequenzen

- Skizzieren Sie eine Unterrichtssequenz zum Thema ...
- Entwickeln Sie eine Unterrichtssequenz zum Thema ...
- Arbeiten Sie eine Unterrichtssequenz zum Thema ... aus
- Beschreiben Sie eine Unterrichtssequenz zum Thema ...

Erklärung

- Darstellung einer geordneten Folge von strukturiert wiedergegebenen Lernaktivitäten
- meist Bezug auf mehrere aufeinanderfolgende Unterrichtseinheiten
- es gibt Sequenzen, bei denen Aufeinanderfolge der Einheiten aus pädagogischen bzw. lernpsychologischen Gründen ein- oder mehrmals unterbrochen wird
- Beschreibung sollte auch methodische Vorschläge zur Erreichung und Sicherung von Lernzielen enthalten
- Anführung von Vorkenntnissen/Lernvoraussetzungen
- detailierte Ausführung jeder einzelnen Unterrichtseinheit wird NICHT erwartet
- *Entwicklen Sie ...* oder *Arbeiten Sie ... aus* verlangt genauere, über *Skizzieren* hinausgehende Erläuterung der Lehr- und Lernschritte

1.2.6 Aufgaben zu Unterrichtseinheiten

- Skizzieren Sie eine Unterrichtseinheit zum Thema ...
- Entwicklen Sie eine Unterrichtseinheit zum Thema ...
- Arbeiten Sie eine Unterrichtseinheit zum Thema ... aus
- Beschreiben Sie unterrichtliche Maßnahmen, Aktivitäten und Lernschritte zum Thema ...

Erklärung

- Unterrichtseinheit ist in der Regel eine Unterrichtsstunde – maximal eine Doppelstunde
- in jedem Fall Darstellung einer Sachanalyse und Planung eines Unterrichtsverlaufs
  - Art und Abfolge von Lehrer- und Schüleraktivität geht klar hervor
  - Erkennbarkeit von Lehrerform, Sozialform und Medieneinsatz
- *Entwickeln Sie ...* oder *Arbeiten Sie ... aus* verlangt genauere, über *Skizzieren* hinausgehende Beschreibung und Begründung der geplanten Verlaufsschritte; KEIN Lehrer-Schüler-Dialog

- Termwerte im Zahlenbereich der natürlichen Zahlen berechnen
- Lösungsmengen einfacher Gleichungen sowie Ungleichungen im Zahlenbereich der natürlichen Zahlen bestimmen
- sicheres Rechnen mit gängigen Größen und Maßeinheiten
- einfache Sachaufgaben lösen
- die grundlegenden geometrischen Figuren; Bestimmung von Umfang und Flächeninhalt von Rechtecken
- Volumen und Oberfläche von Würfel und Quader
- sicherer und sorgfältiger Umgang mit dem Zeichenwerkzeug
- Teilbarkeitsregeln anwenden; größter gemeinsamer Teiler (ggT) und kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)
- Erfassen, Darstellen und Auswerten von Daten

Inhalt der Jahrgangsstufe 5

(1) Aufbau des Dezimalsystems

(2) Die vier Grundrechenarten

(3) Rechnen mit Größen aus dem Alltag

(4) Geometrische Grundformen und geometrische Grundbegriffe

(5) Flächenmessung

(6) Raummessung

(7) Teilbarkeit natürlicher Zahlen

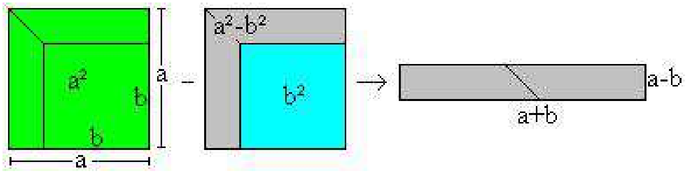
(8) Daten und Zufall

Jahrgangsstufe 6

Am Ende der Jahrgangsstufe 6 sollen die Schüler über folgendes Grundwissen verfügen:

- Rechentechniken (einschließlich Schätzen, Runden und Überschlagsrechnen) und Rechengesetze in den vier Grundrechenarten auf der Grundlage eines gefestigten Zahlenverständnisses im Zahlen bereich der Menge $\mathbb{Q}_0^+$ der positiven rationalen Zahlen
- Termwerte im Zahlenbereich der positiven rationalen Zahlen berechnen
- Lösungsmengen einfacher Gleichungen durch Äquivalenzumformungen über verschiedenen Grundmengen bestimmen
- direkt proportionale Zusammenhänge erkennen und in Sachaufgaben anwenden

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
Das Produkt aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz der Quadrate der beiden Zahlen.



XIII Lehrplanübersicht Realschule

Bemerkung: Im Folgenden entspricht [VSE] der Verkehrs- und Sicherheitserziehung und es wird jeweils nur Mathematik I betrachtet.

Jahrgangsstufe 5

Der Unterricht dieser Jahrgangsstufe baut auf folgenden mathematischen Kenntnissen und Erfahrungen aus der Gundschule auf:

- Zahlbereich: $\mathbb{N}$ bis 1 000 000
- schriftliche Verfahren für Addition, Subtraktion, Multiplikation (ein- und zweistellige Faktoren), Division (ein Divisor bis 20)
- Runden auf alle Vielfache von 10, 100 oder 1000
- gerundete Zahlen in Diagrammen (z. B. Säulendiagramm) darstellen; Informationen aus Texten, Tabellen, Schaubildern und Diagrammen entnehmen
- Größen (auch in Kommaschreibweise): Geldwerte; Zeit; Länge; Masse; Hohlmaße (ml, l)
- Figuren und Körper: Dreieck, Viereck, Rechteck, Quadrat, Kreis
- Würfel, Quader, Kugel, Zylinder, Pyramide, Kegel
- Maßstab
- Symmetrien: Achsensymmetrie (Fachbegriffe: Symmetrieachse, symmetrisch, deckungsgleich); Einblick in die Drehsymmetrie (Fachbegriffe: Drehpunkt, Drehrichtung); Einblick in die Schiebesymmetrie
- Zeichnen mit Geodreieck und Zirkel; Zeichnen und Messen von Strecken

Am Ende der Jahrgangsstufe 5 sollen die Schüler über folgendes Grundwissen verfügen:

- Rechentechniken in den vier Grundrechenarten
- Rechengesetze auf der Grundlage eines gefestigten Zahlenverständnisses im Zahlbereich $\mathbb{N}_0$

- der Verlaufsplanung sind voranzustellen
  - Darstellung notwendiger Lernvoraussetzungen und erforderlichen Vorwissens der SuS
  - (strukturierte) Formulierung der Unterrichtsziele: Grob- und Feinziele; allgemeine Ziele, Nebenziele
- Punkte für Verlaufsplanung sollen bzw. können sein
  - Motivation für zu behandelndes Thema
  - eigentliche Behandlung des Themas im Unterricht
    - wichtige Lehrerimpulse unter Berücksichtigung möglicher Lernschwierigkeiten
    - mögliche Aufgaben, Arbeitsblätter, Medieneinsatz
  - Möglichkeiten der Vertiefung und der Lernzielkontrolle

1.3 Definieren von Begriffen

- Verwendung möglichst weniger Angaben um gleichzeitig präzise und eindeutig einen mathematischen Begriff zu charakterisieren
- extrem teures Telefongespräch als Hilfsvorstellung
- „Kann ein Unkundiger mit der gegebenen *Erklärung* verstehen, worum es geht?“
- formale Hilfe: „Ein (bekannter Begriff) nennt man/heißt (neuer Begriff), wenn (charakterisierende Bedingungen) ...“

1.3.1 Statische Definitionen

Generell verwendet man zur Charakterisierung mathematischer Begriffe bereits bekannte Eigenschaften und/oder bereits definierte Begriffe.

Formulierungen, welche einen Begriff lediglich mit Hilfe von Eigenschaften beschreiben, nennt man statische Definitionen.
Generell strebt man an, dass die zur Beschreibung verwendeten Eigenschaften

- **U**nabhängikeit
- **V**ollständigkeit: Um einen Begriff hinreichend genau zu beschreiben, müssen genügend viele Forderungen an seinen Oberbegriff gestellt werden; charakterisierende Eigenschaften müssen vollständig sein, um das zu beschreiben, was beschrieben werden soll.
- **W**iderspruchsfreiheit

sind (Merkhilfe: UVW-Regel).

1.3.2 Dynamische Definitionen

Insbesondere bei geometrischen Körpern fällt es oft schwer, statische Definitionen anzuführen. Oft weicht man deshalb auf Formulierungen aus, die Entstehungs- und Herstellungsweise von Körpern beschreiben. Es werden oft Vorstellungen wie *Ziehen*, *Verbinden*, *Dehnen* herangezogen. Derartige Beschreibungen nennt man dynamische Definitionen.

Beim eigenen formulieren dynamischer Definitionen ist es günstig, ein Standardformat und eine Standardformulierung zu verwenden:
Standardformat besteht aus zwei Teilen:

- erster Teil: Angabe, welche Elemente zum *Herstellen* des Begriffs benötigt werden (z. B. Punkt außerhalb einer Ebene)
- zweiter Teil: Beschreibung, wie man mit den zur Verfügung stehenden Objekten den Körper herstellen kann.

Standardformulierung einer dynamischen Definition beginnt mit Angabe der benötigten Herstellungselemente und mit „Gegeben sei ...“ oder „Gegeben ist ...“.
Herstellung des Körpers wird dann eingeleitet mit „Ein ... entsteht, indem man ...“

1.3.3 Definieren von geometrischen Abbildungen

Eine dritte Art von Definitionen bilden die Charakterisierungen geometrischer Abbildungen. Hier ist es günstig, konkrete Konstruktionsvorschriften (für Zirkel- und Linealkonstruktionen) anzugeben, welche beschreiben, wie ein Punkt auf seinen Bildpunkt abgebildet wird.
Generell ist beim Erstellen einer derartigen Konstruktionsvorschrift zu beachten, dass wirklich ausschließlich nur angegeben wird, wie ein Punkt (und NICHT etwa ein Dreieck) abgebildet wird.

Beim Verfassen deratiger Konstruktionsvorschriften ist es günstig, ein Standardformat und eine Standardformulierung zu verwenden:
Standardformat besteht aus vier Teilen:

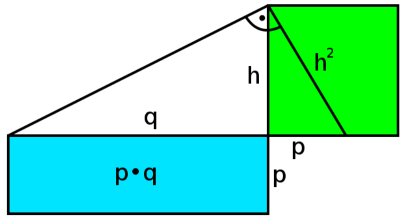
- erster Teil: einleitender Satz der Art „Eine ... ist eine geometrische Abbildung gemäß folgender Vorschrift:“
- zweiter Teil: Angabe, welche Objekte benötigt werden, um Abbildung eindeutig durchführen zu können (z. B. Spiegelachse, Drehzentrum und Drehwinkel)
- dritter Teil: Beschreibung für einen Urpunkt in allgemeiner Lage, wie man mit zur Verfügung stehenden Objekten einen einzelnen Punkt auf seinen Bildpunkt abbildet
  $\longrightarrow$ eigentliche Konstruktionsvorschrift
- vierter Teil: Abbildung von speziellen Punkten, bei denen die im dritten Teil angegebene Konstruktion NICHT durchführbar ist (z. B. Abbildung des Zentrums einer Punktspiegelung)

Setzt man nun obige Formeln in $(*)$ ein, so erhält man

$$h^2 + p^2 + h^2 + q^2 = p^2 + 2pq + q^2 \implies h^2 = pq$$

(iii)

Skizze[3]



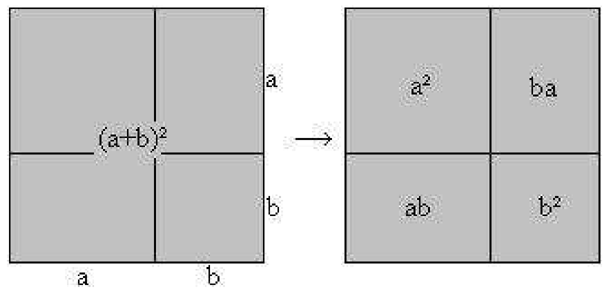
Analog zum Beweis des Höhensatzes erhält man $a^2 = pc$ und $b^2 = qc$.

□

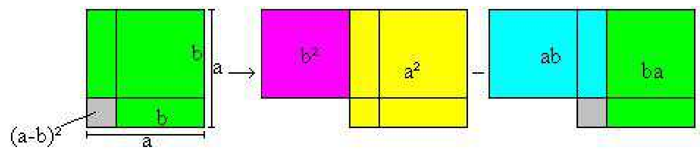
XII Graphische Darstellung binomischer Formeln

Binomische Formeln kann man folgendermaßen graphisch darstellen[4]:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Das Quadrat der Summe zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate der Zahlen, vermehrt um das doppelte Produkt.



$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Das Quadrat der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate der Zahlen, vermindert um das doppelte Produkt.



[3] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/eb/H%C3%B6hensatz.svg (Zugriff am 03.03.2015)
[4] http://www.mathematische-basteleien.de/binomi.htm#Graphische%20Darstellung (Zugriff am 03.03.2015)

$\Longrightarrow$ ΔDBC, ΔADC und ΔABC sind ähnlich

$$\Delta DBC \sim \Delta ABC \implies \frac{a}{p} = \frac{c}{a} \implies a^2 = cp$$

$$\Delta ADC \sim \Delta ABC \implies \frac{b}{q} = \frac{c}{b} \implies b^2 = cq$$

$$a^2 + b^2 = cp + cq = c(q+p) = c^2$$

$$\Delta ADC \sim \Delta DBC \implies \frac{h}{p} = \frac{q}{h} \implies h^2 = pq$$

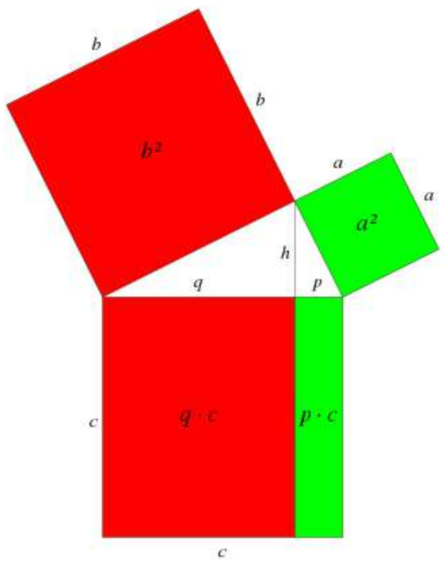
Da die Flächen der Dreiecke proportional zur Fläche der jeweils angrenzenden Quadrate sind, repräsentiert die Gleichung

$$CBD + ACD = ACB$$

den Satz.

(ii)

Skizze[2]



Für die drei rechtwinkligen Dreiecke mit den Seiten a,b,c und h,p,a und h,q,b gilt jeweils der Satz des Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (*) \quad ; \quad h^2 + p^2 = a^2 \quad ; \quad h^2 + q^2 = b^2$$

Ferner gilt: $p + q = c \implies (p+q)^2 = c^2$

[2] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c3/Kathetensatz.svg (Zugriff am 03.03.2015)

1.4 Mathematische Sätze und Beweise

1.4.1 Aussagen und mathematische Sätze

- Aussagen: im Allgemeinen nur grammatische Konstruktionen von Bedeutuung, von denen man prinzipiell unterscheiden kann, ob sie wahr sind oder falsch
- wahre Aussagen nennt man in der Mathematik Sätze
- Jeder mathematische Satz besteht aus einer Voraussetzung und einer Behauptung.

1.4.2 Strukturieren von Beweisen

In der Wenn-Dann-Formulierung eines Satzes steht hinter dem *Wenn* die Voraussetzung und hinter dem *Dann* die Behauptung. Dies bildet die Grundlage für den Beweis des Satzes.

prinzipielle Struktur eines Beweises:
Voraussetzung $\Longrightarrow$ Folgerung $\Longrightarrow$ ... $\Longrightarrow$ ... $\Longrightarrow$ Behauptung

Probleme bei dieser Art der Darstellung:

- häufig Missverständnisse über Bedeutung des Inklusionspfeils
- Begründungen für einzelne Folgerungen nicht/unvollständig angegeben

Beachte deshalb folgendes Standardformat für Beweise: Voraussetzung(en) $\Longrightarrow$ Folgerung 1 mit Begründung $\Longrightarrow$ Folgerung 2 mit Begründung $\Longrightarrow$ ... $\Longrightarrow$ Behauptung mit Begründung

1.4.3 Satz und Kehrsatz

prinzipielle Struktur mathematischer Sätze: Voraussetzung $\Longrightarrow$ Behauptung ODER Wenn Voraussetzung, dann Behauptung

häufige Fehlerquelle beim Formulieren eines Beweises eines Satzes: (unbewusstes) Vertauschen von Voraussetzung und Behauptung
$\longrightarrow$ Vertauscht man bei einem mathematischen Satz Voraussetzung und Behauptung, so erhält man die Umkehraussage.

Die Umkehraussage eines (wahren) Satzes ist NICHT von vornherein wahr.

1.4.4 Beweisideen

Zum Beweisen von Sätzen im Staatsexamen gibt es prinzipiell zwei Strategien:

- Beweis bzw. Beweisidee auswendig gelernt
- man bedient sich heuristischer Methoden, um Beweisidee zu generieren

Beim Auswendiglernen reicht die zugrundeliegende, spezifische Beweisidee voll und ganz aus.

heuristische Strategien:

- in Geometrie: Einzeichnen „guter“ Hilfslinien

Aufgaben mit	Hilfslinien
Dreiecken	Höhen, Seitenhalbierende, Winkelhalbierende, Mittelsenkrechten, Parallelen zu Seiten
Vierecken	Diagonalen, Seitenmittenlinien
Kreisen	Radien, Tangenten

- in Arithmetik und Algebra: Verwenden zugrundeliegender Definitionen

1.5 Allgemeines zu Unterrichtseinheiten und Unterrichtssequenzen

1.5.1 Begriffserläuterungen

- **Unterrichtseinheit (UE)**
  - dauert eine oder zwei Unterrichtsstunden
  - in Examensprüfung KEINE Angabe von Zeiteinheiten für die Teile der UE erforderlich
  - Darstellung des Themas oder einer Lerneinheit im Rahmen von ein bis eineinhalb Zeitstunden
- **Unterrichtssequenz (US)**
  - umfasst mehrere UEs: ca. 4 bis 10 UEs
  - in Examensprüfung KEINE Angabe einer zeitlichen Unterteilung der US in UE erforderlich

1.5.2 Struktur einer Unterrichtseinheit

- **Vorbereitungs- und Durchführungsteil**
  Vorbereitungsphasen
  - Sachanalyse
  - Lernvoraussetzungen
  - Lernziele
  - evtl. methodische und didaktische Vorbemerkungen

  Durchführungsphasen
  - Einstieg in die Problemstellung
  - Problemstellung
  - Problemlösung
  - Sicherung
  - Vertiefung

  Ob alle diese Phasen in einer UE vorkommen und in welcher Ausprägung dies geschieht, hängt vom Thema und auch davon ab, ob es sich um eine Einführungsstunde oder eine

(d) erhalte dadurch ein Parallelogramm mit der Fläche $A_P = \text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe} = (a+c) \cdot h \implies A_T = \frac{(a+c)\cdot h}{2}$

(2) Seien m die Mittellinie und h die Höhe des Trapezes.

(a) konstruiere ein Trapez und ein Rechteck mit Breite m und Höhe h

(b) lege Trapez und Rechteck übereinander

(c) Die beiden Dreiecke, die über das Rechteck hinausragen, sind jeweils kongruent mit den beiden Dreiecken, die das Trapez vom Rechteck „abtrennen“.

(d) legt man diese Dreiecke entsprechend um, so erhält man ein Rechteck mit der Fläche $A_R = m \cdot h$

$\implies A_T = m \cdot h$

□

Beh: Satzgruppe des Pythagoras

(i) Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

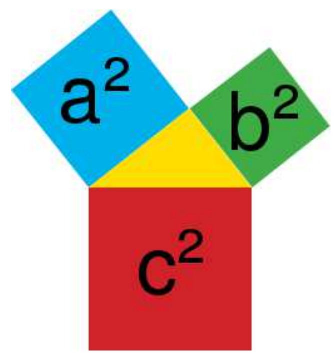
(ii) Kathetensatz des Euklid: $a^2 = p \cdot c$ und $b^2 = q \cdot c$

(iii) Höhensatz des Euklid: $h^2 = p \cdot q$

Beweis

(i)

Skizze[1]



Sei ΔABC ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten a, b und c. Ferner seien D der Höhenfußpunkt der Höhe h, $q = [AD]$ und $p = [BD]$.
Wegen der Winkelsumme im Dreieck gilt: $\sphericalangle ACD = \sphericalangle CBD$

[1] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/38/Pythagoras_large_font.svg (Zugriff am 03.03.2015)

(⇐) Sei ΔABC gleichschenklig. Ferner seien M_b der Mittelpunkt von $[AC]$ und M_a der Mittelpunkt von $[BC]$.
Es gilt: $\overline{AC} = \overline{BC} \implies \overline{AM_b} = \overline{BM_a}$ und $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CBA$
Nach Kongruenzsatz SWS folgt: $\Delta ABM_a \cong \Delta ABM_b$
Damit folgt sofort: $\overline{AM_a} = \overline{BM_b}$

□

Beh: Das Produkt zweier teilerfremder natürlicher Zahlen ist genau dann eine Quadratzahl, wenn beide Zahlen Quadratzahlen sind.

Beweis

(⇐) Seien $\text{ggT}(m,n) = 1$, $m = b^2$ und $n = c^2$ mit $b,c,m,n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt: $m \cdot n = b^2 \cdot c^2 = (b \cdot c)^2$

(⇒) Seien $\text{ggT}(m,n) = 1$ und $m \cdot n = a^2$ mit $a,m,n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt: $m \cdot n = a^2 \iff \sqrt{mn} = a$
Wegen $a \in \mathbb{N}$ muss auch $\sqrt{mn} \in \mathbb{N}$ sein.
Dies ist genau dann der Fall, wenn $m \cdot n$ eine Quadratzahl ist.
Ferner gilt: $\sqrt{mn} = \sqrt{m} \cdot \sqrt{n}$
Dies ist nur dann in $\mathbb{N}$ enthalten, wenn m und n selbst schon Quadratzahlen sind.
Der Fall $m = n$ ist wegen $\text{ggT}(m,n) = 1$ ausgeschlossen.

□

Beh: Das geometrische Mittel ist kleiner als das arithmetische Mittel oder gleich:
$\sqrt{a \cdot b} \leqq \frac{a+b}{2}$

Beweis

Idee: Unter den Rechtecken mit gleichem Umfang hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.

$$\begin{aligned}
& \sqrt{a \cdot b} \leqq \frac{a+b}{2} \quad (*) \\
\iff\ & 2 \cdot \sqrt{a \cdot b} \leqq a + b \\
\iff\ & 4 \cdot a \cdot b \leqq (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\
\iff\ & 0 \leqq a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2
\end{aligned}$$

Dies gilt für alle $a,b \in \mathbb{R}$, also ist auch $(*)$ als äquivalente Gleichung allgemein gültig.

□

Beh: Der Flächeninhalt eines Trapezes ist (1) $A_T = \frac{(a+c) \cdot h}{2}$ und (2) $A_T = m \cdot h$.

Beweis

(1) Seien a und c die beiden parallelen Seiten und h die Höhe des Trapezes.

(a) konstruiere zwei kongruente Trapeze

(b) zeichne Höhe h auf Seite a ein

(c) lege eines der Trapeze so an das andere, dass die beiden gleichen Schenkel aneinander liegen

Wiederholungs- oder Übungsstunde handelt.

Üblicherweise ist in der Examensprüfung für die Beschreibung dieses unterrichtspraktischen Teils etwa eine Zeitstunde vorgesehen. Als Richtmaß sollte NICHT mehr als ein Viertel der Zeit auf die Vorbereitungsphasen verwendet werden. Oft werden auch nur Teile einer UE verlangt, welche dann entsprechend ausführlich bearbeitet werden sollten.

- **Sozialformen**
  - Lehrer-Schüler-Gespräch: (Frontal-)Unterricht des Lehrers mit gesamter Klasse
  - individuelles Arbeiten
  - Partner- oder Gruppenarbeit
  - Stationenlernen oder Lernzirkel
  - Projektunterricht
  - Unterricht im Computerraum

  Üblicherweise sollten in einer UE mehrere Sozialformen, welche vom Ziel des Unterrichtsabschnittes abhängen, vorkommen.

  Bei der Durchführung einer UE sollte vor allem auf folgendes geachtet werden:
  - aktive Beteiligung von SuS am Unterricht
  - adäquate kognitive Forderung der SuS
  - im Auge behalten von Ziel bzw. Teilzielen der UE

1.5.3 Struktur einer Unterrichtsequenz

Vorbereitungsphasen wie bei UE

Durchführungsphasen: stärker auf längerfristigen Lernprozess ausgerichtet

- Einordnung in Gesamtcurriculum und Problemstellung
- Angabe der Lernschritte im Rahmen der US
- Sicherung

Wichtig bei US:

- deutliches Herausstellen der aufeinander aufbauenden Lernschritte
- Beschreibung kann – muss aber nicht – in Form aufeinanderfolgender UE erfolgen

1.5.4 Vorbereitungsphasen

- **mathematische Sachanalyse**: Um welche(n) mathematischen Inhalt(e) geht es?
  - Erfassen vorkommender Begriffe von ihrem mathematischen Inhalt her
  - kurze Erläuterung der vorkommenden Begriffe oder Verfahren (Definition oder Darstellung eines Verfahrens)
  - evtl. Einordnung der Begriffe oder Verfahren in größere Zusammenhänge
  - in Examensprüfung häufig bereits in vorhergehenden Aufgaben bereits durchgeführt
  - hilfreich, sich selbst die Frage zu stellen,
    * welche zentralen Begriffe auftreten
    * welche Zusammenhänge zu anderen Begriffen bestehen
    * um welches Verfahren es sich handelt
    * was die Aussage eines angegebenen oder benötigten Satzes ist
- **Lernvoraussetzungen**
  - betreffen das mathematische Wissen
  - Fähigkeiten und Fertigkeiten der SuS

  $\rightsquigarrow$ zum Verständnis der UE oder US notwendig

  häufiger Fehler: Lernvoraussetzungen werden zu allgemein beschrieben
- **Lernziele**: Welche Ziele werden gesetzt bzw. welche Kompetenzen sollen Lernende erwerben?
  - Ziele, welche mit UE oder US erreicht werden sollen
  - Ziele können sich beziehen auf
    * Wissen
    * Können
    * Fähigkeiten
    * Fertigkeiten
    * affektiven Bereich
  - operationalisiert: Lernziele sollten so angeführt werden, dass sie sich zum einen auf einen spezifischen Inhalt beziehen und zum anderen, dass ihr Erreichen auch überprüft werden kann
  - es können auch Grob- bzw. Hauptziel (DAS zentrale Ziel) und Feinziele unterschieden werden

  Bei der Beschreibung von Lernzielen sollten insbesondere die in den KMK-Bildungsstandards angeführten *Kompetenzen* berücksichtigt werden, bei denen nach Inhalts- und Prozesszielen unterschieden wird.

Man erhält also
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot \overline{CS} = a^2 + b^2 + 2ac\cos(\gamma)$$

Im Falle eines stumpfwinkligen Dreiecks geht man analog vor und man erhält:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

□

Beh: Ein konvexes Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn sich die gegenüberliegenden Winkel zu 180° ergänzen.

Beweis

(⇒) Sei ein konvexes Viereck $\square ABCD$ ein Sehnenviereck.
$\Longrightarrow$ $\exists$ Kreis k, sodass gilt: $A,B,C,D \in k$
Zeichne nun eine weitere Sehne ein und wähle diese ohne Einschränkung $[BD]$.
Nun bilden die beiden Kreisbögen BD und DB sich ergänzende Kreisbögen.
Nach Umfangswinkelsatz gilt, dass sich Umfangswinkel über sich ergänzenden Kreisbögen zu 180° ergänzen. Also gilt hier auch, dass sich gegenüberliegende Winkel zu 180° ergänzen.

Für die Sehne $[AC]$ gilt dies analog

(⇐) Es ergänzen sich gegenüberliegende Winkel im konvexen Viereck $\square ABCD$ zu 180°.
Nach Umfangswinkelsatz existieren zwei sich ergänzende Kreisbögen, deren Umfangswinkel sich zu 180° ergänzen.
$\Longrightarrow$ $\exists$ Kreis k, sodass gilt: $A,B,C,D \in k$
$\Longrightarrow$ konvexes Viereck $\square ABCD$ ist ein Sehnenviereck

□

Beh: Zwei Seitenhalbierende eines Dreiecks sind genau dann gleich lang, wenn das Dreieck gleichschenklig ist.

Beweis

(⇒) Seien M_b der Mittelpunkt von $[AC]$, M_a der Mittelpunkt von $[BC]$ und S der Schnittpunkt von $[AM_a]$ und $[BM_b]$.

Es gilt: Seitenhalbierende teilen sich in allen Dreiecken im Verhältnis $\frac{2}{1} = \frac{\overline{AS}}{\overline{SM_a}} = \frac{\overline{BS}}{\overline{SM_b}}$

Nach Voraussetzung gilt: $\overline{AS} = \overline{BS}$ und $\overline{SM_a} = \overline{SM_b}$

Ferner gilt für ΔASM_b und ΔBM_aS: $\sphericalangle M_bSA = \sphericalangle BSM_a$

Mit Kongruenzsatz SWS gilt: $\Delta ASM_b \cong \Delta BM_aS$

$\Longrightarrow$ $\overline{AM_b} = \overline{BM_a} \Longrightarrow \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{BC} \Longrightarrow \overline{AC} = \overline{BC}$
$\Longrightarrow$ ΔABC ist gleichschenklig.

Mit der Winkelsumme im Dreieck ΔABC gilt:

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \sphericalangle MAC + \sphericalangle CBM + (\sphericalangle MAC + \sphericalangle CBM) \\ &= 2 \cdot \sphericalangle MAC + 2 \cdot \sphericalangle CBM \\ \Longrightarrow 90^\circ &= \sphericalangle MAC + \sphericalangle CBM \\ &= \sphericalangle ACB \end{aligned}$$

□

Beh: Sinussatz: In einem beliebigen Dreieck ΔABC gilt: $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$.

Beweis

Sei $D \in [AB]$ der Höhenfußpunkt der Höhe h_c. Dann gilt nach Definition:

$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b}$ und $\sin(\beta) = \frac{h_c}{a}$

$\Longrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$

Unter Benutzung der gleichen Schlussweise mit einer weiteren Höhe (h_a oder h_b) erhält man die vollständige Behauptung.

□

Bemerkung: Dieser Satz gilt auch in stumpfwinkligen Dreiecken, da $\sin(\pi - \beta) = \sin(\beta)$ gilt.

Beh: Cosinussatz: In einem beliebigen Dreieck ΔABC gilt: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$.

Beweis

Betrachte zunächst ein spitzwinkliges Dreieck ΔABC.
Sei $S \in [BC]$ der Höhenfußpunkt der Höhe h_a. Man erhält somit zwei rechtwinklige Dreiecke ΔABS und ΔSCA.
Betrachte zunächst ΔABS und erhalte nach Pythagoras:
$c^2 = (\overline{BS})^2 + h_a^2 \iff h_a^2 = c^2 - (\overline{BS})^2$

und genauso in ΔSCA: $b^2 = (CS)^2 + h_a^2 \iff h_a^2 = b^2 - (CS)^2$

Setze beide Gleichungen zusammen und erhalte zusammen mit $a = BS + CS$:

$$\begin{aligned} & c^2 - (\overline{BS})^2 = b^2 - (\overline{CS})^2 \\ \iff & c^2 = b^2 + (\overline{BS})^2 - (\overline{CS})^2 \\ \iff & c^2 = b^2 + \left(a - (\overline{CS})\right)^2 - (\overline{CS})^2 \\ \iff & c^2 = b^2 + a^2 - 2a \cdot \overline{CS} + (\overline{CS})^2 - (\overline{CS})^2 \\ \iff & c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot \overline{CS} \end{aligned}$$

In ΔSCA ist nun aber $[CS]$ gerade die Ankathete von $\gamma = \sphericalangle ACB$ und b die Hypotenuse.
Also gilt:

$$\cos(\gamma) = \frac{\overline{CS}}{b} \iff \overline{CS} = b \cdot \cos(\gamma)$$

- **allgemeine mathematische Kompetenzen**
  * mathematisch argumentieren
  * Probleme mathematisch lösen
  * mathematisch modellieren
  * mathematische Darstellungen verwenden
  * mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
  * Kommunizieren
- **Anforderungsbereiche mathematischer Kompetenzen**
  * Reproduzieren
  * Zusammenhänge herstellen
  * Verallgemeinern und Reflektieren
- **inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen**
  * Leitidee Zahl
  * Leitidee Messen
  * Leitidee Raum und Form
  * Leitidee funktionaler Zusammenhang
  * Leitidee Daten und Zufall

Wenn nicht ausdrücklich eine ausführliche Beschreibung der Lernziele verlangt ist, dann ist eine Beschränkung auf wenige zentrale Ziele sinnvoll. Hierfür sind 3 oder 4 Ziele völlig ausreichend. Eine Unterscheidung zwischen Grob- und Feinzielen ist NICHT notwendig.

- **didaktische und methodische Vorbemerkungen (evtl.)**
  - didaktische Vorbemerkung: Darlegung, welche Bedeutung Thema im Rahmen des gesamten Curriculums besitzt und warum es im mathematischen Lehrgang wichtig ist
  - methodische Vorbemerkung: Begründung, wie das Thema im Unterricht behandelt wird
  - in der Examensprüfung ist es ratsam, diesen Teil erst NACH der Beschreibung der Durchführungsphasen zu erstellen bzw. die (Vor-)Bemerkung in die Durchführungsphase zu integrieren
    $\longrightarrow$ didaktische oder methodische Erläuterungen in einzelnen Phasen integriert

1.5.5 Durchführungsphasen einer UE

Wie kann man vorgehen, damit Lernende die angestrebten Ziele erreichen können?

- Einstieg in die Problemstellung
  - Hinführung zum Thema
  - häufig auch das Wort *Motivation* verwendet
  - sollte neugierig machen

- sollte Frage oder Problem aufwerfen
- kann Wiederholung früherer Inhalte (Grundwissen, letzte Stunde) sein
- kann inner- und außermathematische Themenstellung sein
- kann lediglich aus Information bestehen, z. B. heute Stationenlernen; dann soll aber auf Bedeutung der Inhalte in der Stunde oder am Ende der UE eingegangen werden
- didaktische und/oder methodische Anmerkungen und Erläuterungen einfügen; besonders bei ungewöhnlichen Einstiegen ⇝ Warum wurde der Einstieg genau so gewählt?
- prinzipiell sind ungewöhnliche Einstiege gerne gelesen

- <u>Problemstellung</u>
  - Problemstellung evtl. durch weiteres Beispiel nach dem Einstieg deutlich hervorheben
  - SuS muss im Laufe der Stunde deutlich werden, mit welchem Problem bzw. welcher Frage sie sich beschäftigen sollen
  - häufig direkt mit Aufgabenstellung gegeben

- <u>Problemlösung</u>
  - zentraler Teil der UE
  - Darstellung, in welcher Art und Weise SuS die Lösung des Problems erreichen sollen; dazu sind folgende Fragen und Überlegungen notwendig oder hilfreich:
    - Welche Schritte werden von SuS erwartet bzw. vom Lehrer angedacht?
    - Hilfreich, wenn Lösung auf verschiedenen Darstellungsebenen (enaktiv, ikonisch, symbolisch) erfolgt?
    - Hilfestellungen für SuS, die die Lösung NICHT sofort erkennen?
    - Arbeitsblätter?
    - Erwartung von Ergebnissen nach Gruppenarbeit der SuS?
    - Hilfsmittel? Medien, neue Technologien?
  - didaktische und/oder methodische Anmerkungen und Erläuterungen einfügen

- <u>Sicherung</u>
  - Festigung und Übung vom erhaltenen Resultat bzw. der Problemlösung
  - Anwendung von erkannten Zusammenhängen, Verfahren und Einsichten in (sehr) ähnlichen Beispielen
  - Transfer auf unbekannte Bereiche nur in engen Grenzen
  - für jegliches Lernen ist Üben und Sichern sehr wichtig

- <u>Vertiefung</u>
  - Behandlung oder Hinweis auf weitergehende Fragen
  - Aufgaben mit eigenem Problemlöseansatz oder Transfer auf andere Gebiete
  - Erwartung neuer kreativer Ansätze

$\sphericalangle ACB + \sphericalangle BDA = 180°$

(iv) Sei die Gerade durch E und M die Mittelsenkrechte von $[AB]$. Diese schneide die Tangente an den Kreis durch A im Punkt F.
Die Dreiecke ΔFMA und ΔFEA sind rechtwinklige Dreiecke mit dem gemeinsamen Winkel $\sphericalangle AFE = \sphericalangle AFM$. Wegen der Winkelsumme im Dreieck muss daher gelten:

$$\sphericalangle FAE = \sphericalangle AMF \quad (\diamondsuit)$$

$\sphericalangle AMF$ ist aber gerade der halbe Mittelpunktswinkel, da $[ME]$ als Mittelsenkrechte im gleichschenkligen Dreieck ΔABM gleichzeitig die Winkelhalbierende von $\sphericalangle AMB$ ist.
Damit gilt aber nach (ii):

$$\sphericalangle AMF = \sphericalangle ACB \quad (\natural)$$

Zusammen erhält man dann mit $(\diamondsuit)$ und $(\natural)$:
$\sphericalangle FAE = \sphericalangle AMF = \sphericalangle ACB \quad$ und $\quad \sphericalangle FAE = \sphericalangle ACB$

□

<u>Beh</u>: Umkehrung des Umfangswinkelsatzes/Peripheriewinkelsatzes: Über einer Strecke $[AB]$ werden die Punkte C und D so gewählt, dass sie in einer Halbebene liegen und $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ gilt. Dann liegen die Punkte A, B, C und D auf einem Kreis.

<u>Beweis</u>

Bilde den Kreis k um die Punkte A, B und C.
Angenommen $D \notin k \implies \exists$ Punkt $P \in (AD \cap k)$
Nach Umfangswinkelsatz/Peripheriewinkelsatz gilt nun aber: $\sphericalangle ACB = \sphericalangle APB = \sphericalangle ADB$
Ferner gilt nach Kongruenzsatz SSW: $\Delta ABP = \Delta ABD$
Das heißt, die beiden Dreiecke müssen sogar identisch übereinander liegen, da sie zwei gemeinsame Punkte haben.
Damit müssen aber die Punkte P und D übereinstimmen, was im Widerspruch zur Annahme $D \notin k$ steht.

□

<u>Beh</u>: Satz des Thales: Liegen die Eckpunkte eines Dreiecks ΔABC auf einem Kreis und geht die Grundseite durch den Mittelpunkt M des Kreises, so handelt es sich um ein rechtwinkliges Dreieck..

<u>Beweis</u>

Sei M der Mittelpunkt der Strecke $[AB]$ und r der Radius des Kreises.
Dann gilt: $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = r$
Somit sind ΔAMC und ΔMBC gleichschenklige Dreiecke.
In gleichschenkligen Dreiecken sind die Basiswinkel gleich groß, also gilt:
$\sphericalangle MAC = \sphericalangle ACM \quad$ und $\quad \sphericalangle CBM = \sphericalangle MCB$

Beweis

(ii) Für diesen Teil ist eine Fallunterscheidung nötig:

1. Fall: M liegt auf AC. Dann gilt:
ΔMBC ist gleichschenklig $\Longrightarrow \sphericalangle CMB = \sphericalangle MCB \quad (*)$
Weiter gilt: $\sphericalangle AMB$ ist Außenwinkel des Dreiecks ΔMBC und damit gilt:
$\sphericalangle AMB = \sphericalangle MCB + \sphericalangle CBM \overset{(*)}{=} 2 \cdot \sphericalangle ACB$

Der symmetrische Fall, dass M auf $[BC]$ liegt, kann analog gezeigt werden.

2. Fall: M liegt im Inneren des Dreiecks ΔABC. Dann gilt:
$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACM + \sphericalangle MCB \quad (\clubsuit)$
ΔAMC ist gleichschenklig $\Longrightarrow \sphericalangle MAC = \sphericalangle MCB$
ΔBCM ist gleichschenklig $\Longrightarrow \sphericalangle CBM = \sphericalangle MCB \quad (**)$

Außerdem gilt wegen der Winkelsumme im Dreieck und $(**)$:
$\sphericalangle CMA = 180° - 2 \cdot \sphericalangle ACM \quad$ und $\quad \sphericalangle BMC = 180° - 2 \cdot \sphericalangle MCB$

Für den Mittelpunktswinkel $\sphericalangle AMB$ gilt somit:

$$\begin{aligned}\sphericalangle AMB &= 360° - (\sphericalangle CMA + \sphericalangle BMC)\\ &= 360°(180° - 2 \cdot \sphericalangle ACM + 180° - 2 \cdot \sphericalangle MCB)\\ &= 360° - (360° - 2 \cdot (\sphericalangle ACM + \sphericalangle MCB))\\ &\overset{(\clubsuit)}{=} 2 \cdot \sphericalangle ACB\end{aligned}$$

3. Fall: M liegt außerhalb des Dreiecks ΔABC. Dann gilt:
$\sphericalangle ACB = \sphericalangle MCB - \sphericalangle MCA \quad (\spadesuit)$
ΔACM gleichschenklig $\Longrightarrow \sphericalangle CAM = \sphericalangle MCA$
ΔBCM gleichschenklig $\Longrightarrow \sphericalangle CBM = \sphericalangle MCB \quad (\heartsuit)$

Außerdem gilt wegen der Winkelsumme im Dreieck und $(\heartsuit)$:
$\sphericalangle AMC = 180° - 2 \cdot \sphericalangle MCA \quad$ und $\quad \sphericalangle BMC = 180° - 2 \cdot \sphericalangle MCB$

Für den Mittelpunktswinkel $\sphericalangle AMB$ gilt somit:

$$\begin{aligned}\sphericalangle AMB &= \sphericalangle AMC - \sphericalangle BMC\\ &= 180° - 2 \cdot \sphericalangle MCA - (180° - 2 \cdot \sphericalangle MCB)\\ &= 2 \cdot (\sphericalangle MCB - \sphericalangle MCA)\\ &\overset{(\spadesuit)}{=} 2 \cdot \sphericalangle ACB\end{aligned}$$

(i) Aus dem Beweis von (ii) folgt, dass alle Umfangswinkel mit demselben Mittelpunktswinkel die gleiche Größe, nämlich gerade den halben Mittelpunktswinkel haben.

(iii) Sei D ein Punkt auf dem Kreisbogen AB.
Die Summe der komplementären Mittelpunktswinkel beträgt: $\sphericalangle AMB + \sphericalangle BMA = 360°$
Also ist nach (ii) die Summe der komplementären Umfangswinkel die Hälfte:

- oft möglich, Vertiefung so zu wählen, dass Ausblick auf eine kommende Themenstellung gegeben wird

VORSICHT: Vertiefung NICHT zu anspruchsvoll gestalten; kann auf zukünftige Themenbereiche hinweisen aber NICHT deren Inhalt ausführlich behandeln!

1.5.6 Durchführungsphasen einer US

Wie kann man vorgehen, damit Lernende die angestrebten Ziele erreichen können?

- Inhalte werden vom Einfachen zum Schweren hin aufgebaut
- Problemstellung und Einordnung in das Gesamtcurriculum
  - Einstieg in US ist häufig ein neuer Abschnitt oder ein neues Kapitel
  - Aufzeigen des Bezuges neuer Inhalte zu bereits behandelten Inhalten; kann durchaus im Umfang einer UE sein
  - am Ende dieser Einordnung sollte die Problemstellung stehen
- Angabe der Lernschritte im Rahmen der US
  - zentraler Teil der Bearbeitung
  - Anführung der Lernschritte unter mathematischen Gesichtspunkten
  - kurz auf methodische Behandlung eingehen
  - didaktische Begründung und Erläuterung der einzelnen Schritte
- Sicherung
  - fortlaufende Sicherung nach jedem der einzelnen Lernschritte
  - Berücksichtigung von Sicherungen bei Beschreibung der Lernschritte

1.5.7 Anhang

Folgende Inhalte sollten auf jedem Fall als **Anhang** beiliegen:

- geplantes Tafelbild
- ggf. Hefteinträge
- Unterrichtsmaterialien: Arbeitsblätter, Gruppenarbeitsaufträge, Laufzettel, Folien ...
- ggf. Sitzplan, falls zum Verständnis nötig

II Hinweise zur Examensprüfung nach [Rei15]

Generell sollte bei der Anfertigung der Examensarbeit auf folgende Aspekte geachtet werden:

- Verwendung korrekter Fachsprache
- Verwendung korrekter mathematischer Schreibweise
- Übersichtlichkeit und korrekte Rechtschreibung
- Verzicht auf Allgemeinaussagen

III Anmerkungen zur Examensprüfung nach [Rot15]

3.1 Inhaltliche Klarstellungen bezüglich verwendbarer Medien

- Arbeitsblatt
  - enthält Impulse, Anregungen, Hilfe, Handlungsaufforderungen ... (sprachliche Ebene)
  - enthält Ausgangssituationen, zu vervollständigende Zeichnungen, Bilderserien ... (handelnde Ebene)
  - enthält bildlich-symbolische Darstellungen (zeichnerische Ebene)
  - kann in jeder Phase des mathematischen Lernprozesses eingesetzt werden
    - Phase der Erstbegegnung: vornehmlich motivierender Charakter
    - Phase der Erkenntnisgewinnung: Vermittlung neuer Kenntnisse in Bezug auf Begriffe, Lehrsätze oder Verfahren
    - Phase der Einübung: Medium einer operativen Sicherung des Gelernten
    - Phase des Transfers: Möglichkeiten und Grenzen der Übertragung des Gelernten
- materielle Objekte
  - Bilder, Modelle, reale Gegenstände, technische Hilfsmittel ...
  - Bereitstellung oder Sicherung von Informationen
  - klare Beschreibung der Unterrichtsskizze

IV Definitionen

Ist im Folgenden von *Zahl* die Rede, dann sollte angegeben werden, aus welcher Grundmenge die Zahl stammt.

4.1 Kongruenzabbildung

- Eine Abbildung, die sich durch eine Achsenspiegelung oder die Hintereinanderausführung von (endlich vielen) Achsenspiegelungen ersetzen lässt, nennt man Kongruenzabbildung.
- Eine Abbildung nennt man Kongruenzabbildung, wenn sie eine Achsenspiegelung, eine Drehung, eine Verschiebung oder eine Schubspiegelung ist.
- Eine Abbildung, die längen- und winkeltreu ist, nennt man Kongruenzabbildung.

4.2 Punktspiegelung

Eine Punktspiegelung ist eine geometrische Abbildung gemäß folgender Vorschrift:

(1) Gegeben sei ein ausgezeichneter Punkt Z (das sogenannte Spiegelzentrum).

(2) Falls Z ungleich P, zeichnet man durch Z und einen Urpunkt P die Gerade ZP und schneidet diese mit dem Kreis $k(Z;P)$ mit Mittelpunkt Z und Radius $|ZP|$. Der Schnittpunkt von $k(Z,P)$ mit ZP, der NICHT mit P zusammenfällt, ist der Bildpunkt P' des Urpunktes P.

(3) Falls $Z = P$, so gilt: $P' = P = Z$.

Frage: Wann sind zwei ebene Dreiecke ähnlich?

Zwei Dreiecke sind ähnliche, wenn gilt:

- (WW) Übereinstimmung in zwei Winkeln ODER
- (SSS) Übereinstimmung in allen Verhältnissen entsprechender Seiten ODER
- (SWS) Übereinstimmung im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ODER
- Übereinstimmung im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite

Beh: Stimmen zwei Dreiecke in zwei Winkeln überein, so sind sie einander ähnlich. (WW)

Beweis

Man zeige, dass eine Ähnlichkeitsabbildung existiert, bei der das eine Dreieck das Bild des anderen Dreiecks ist.
Sei $S_{A;k}$ eine zentrische Streckung mit Zentrum A und Streckfaktor k.

$$S_{A;k}\colon \Delta ABC \to \Delta A'B'C' \qquad , k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

$$\alpha = \alpha' \quad \text{(nach Voraussetzung)}$$

$$\overline{AB_1} = \overline{A'B'}$$

$$\beta_1 = \beta = \beta' \quad \text{(Winkeltreue von } S_{A;k})$$

$$\Longrightarrow \Delta AB_1C_1 \cong \Delta A'B'C' \quad \text{(Kongruenzsatz wsw)}$$

$$\Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \quad \text{(Definition der Ähnlichkeit)}$$

□

Beh: Umfangswinkelsatz/Peripheriewinkelsatz

(i) Alle Umfangswinkel (Peripheriewinkel) über demselben Kreisbogen sind gleich.

(ii) Der Umfangswinkel über einem Kreisbogen ist halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel.

(iii) Umfangswinkel über sich ergänzenden Kreisbögen ergänzen sich zu 180°.

(iv) Der Sehnen-Tangenten-Winkel auf der Gegenseite der Sehne ist gleich groß wie der Umfangswinkel.

Analog zeigt man, dass dies auch für die Seitenhalbierende $[FC]$ mit einer beliebigen weiteren Seitenhalbierenden und es folgt, dass sich alle drei Seitenhalbierenden in einem Punkt S (Schwerpunkt des Dreiecks) schneiden.

□

Beh: Die drei Mittelsenkrechten im Dreieck haben einen gemeinsamen Schnittpunkt.

Beweis

Sei ΔABC ein Dreieck und seien m_a, m_b und m_c die Mittelsenkrechten auf die Dreiecksseiten.
Da m_a, m_b und m_c verschiedene Geraden sind, haben sie jeweils einen gemeinsamen Schnittpunkt.

Sei ohne Einschränkung M der Schnittpunkt von m_a und m_b. Dann gilt:

- M liegt auf m_b, also hat M denselben Abstand zu A und zu C
- M liegt auch auf m_a, also hat M denselben Abstand zu B und zu C

$\Longrightarrow$ M hat auch denselben Abstand zu A und B
$\Longrightarrow$ M liegt auf der Mittelsenkrechten m_c
$\Longrightarrow$ m_a, m_b und m_c schneiden sich also in einem gemeinsamen Punkt M.

□

Beh: Die drei Höhen im Dreieck haben einen gemeinsamen Schnittpunkt.

Beweis

Sei ΔABC ein Dreieck.
Konstruiere zunächst die Parallelen zu den Dreiecksseiten durch die gegenüberliegenden Ecken und erhalte ein größeres Dreieck $\Delta A'B'C'$.
Je zwei der vier Teildreiecke des neuen Dreiecks bilden ein Parallelogramm.
Im Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleich lang und es folgt, dass die Seiten von $\Delta A'B'C'$ gerade doppelt so lang sind wie die Seiten von ΔABC.
Die Höhen des ursprünglichen Dreiecks ΔABC stimmen daher mit den Mittelsenkrechten des Dreiecks $\Delta A'B'C'$ überein.
Da sich die Mittelsenkrechtn eines Dreiecks in einem Punkt schneiden (Umkreismittelpunkt), muss dies auch für die Höhen des Dreiecks ΔABC gelten.

□

Frage: Wann fallen die Schnittpunkte von den Höhen und den Seitenhalbierenden im Dreieck zusammen?

Im gleichseitigen Dreieck fallen die Höhen, Winkelhalbierenden, Seitenhalbierenden und Mittelsenkrechten zusammen.

Frage: Was unterscheidet die Mittelsenkrechten von den anderen Dreieckslinien?

Die Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt, welcher gleich weit von allen drei Eckpunkten entfernt ist und gleichzeitig Mittelpunkt des Umkreises ist.

4.3 Term

Ein Term ist ein *sinnvoller Rechenausdruck* (formal: eine *Zeichenreihe*), der bei Belegung sämtlicher Variablen in einen Zahlenwert übergeht.

Bemerkung: Somit darf in einem Term KEIN „=“ enthalten sein!

4.4 Funktion

Gegeben seien zwei nichtleere Mengen A,B. Eine Funktion ist eine Zuordnung, die jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ zuordnet.

4.4.1 injektive Funktion

Für alle $x_1 \neq x_2$ gilt: $f(x_1) \neq f(x_2)$

4.4.2 surjektive Funktion

Es gibt für alle $y \in B$ ein $x \in A$ mit $f(x) = y$

4.4.3 bijektive Funktion

Eine Funktion heißt bijektiv, falls sie injektiv und surjektiv ist.

4.4.4 proportionale Funktionen

Funktionen mit der Termdarstellung

$$x \longmapsto ax \quad , a > 0 \; , x > 0$$

heißen proportionale Funktionen. a ist dabei der Proportionalitätsfaktor.

4.4.5 lineare Funktion

Eine Funktion $f\colon x \longmapsto mx + t$ mit $m,t \in \mathbb{Q}$ heißt lineare Funktion.

4.4.6 Betragsfunktion

Die Funktion $f\colon x \longmapsto |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$ heißt Betragsfunktion.

4.5 Teilbarkeit

Für Zahlen a und b sagen wir: a teilt b, falls es eine Zahl k gibt mit $b = k \cdot a$.

4.6 Teilermenge

Für eine Zahl n heißt die Menge $T(n) = \left\{ a \;\middle|\; a \text{ teilt } n \right\}$ Teilermenge von n.

4.7 Primzahl

Hat die Teilermenge $T(n)$ genau zwei Elemente, so heißt die Zahl n Primzahl.

4.8 teilerfremde Zahlen

Gilt für zwei Zahlen a und b $\mathrm{ggT}(a;b) = 1$, so nennt man a und b teilerfremd.

4.9 Gerade

Eine Gerade ist eine Linie von unendlicher Ausdehnung.

4.10 parallele Geraden

- Zwei Geraden g und h heißen parallel, wenn sie sich NICHT schneiden (oder gleich sind).
- Zwei Geraden heißen parallel, wenn sie überall den gleichen Abstand zueinander haben.
- Zwei Geraden heißen parallel, wenn sie von einer dritten Geraden im gleichen Winkel geschnitten werden.

4.11 senkrechte/orthogonale Geraden

- Zwei Geraden g und h heißen senkrecht ($g \perp h$), wenn sie sich schneiden und alle vier entstehenden Winkel rechte Winkel sind.
- Zwei Geraden g und h heißen senkrecht, wenn $g \neq h$ und die Gerade g bei einer Achsenspiegelung an h mit ihrem Bild zur Deckung kommt (g also Fixgerade ist).
- Zwei Geraden g und h heißen senkrecht, wenn $g \neq h$ und es eine Drehung um 90° gibt, die gleichzeitig g auf h und h auf g abbildet.

4.12 Ortslinie und Ortsbereich

Punkte, die eine Eigenschaft E besitzen, heißen geometrischer Ort zur Eigenschaft E.

Bemerkung: E ist in der Schule meistens „gleicher Abstand von …“.

Bildet diese Punktmenge eine Linie, so heißt diese Ortslinie.

Stellt die Punktmenge eine Ebene oder einen Teil der Ebene dar, so heißt sie Ortsbereich.

4.13 Kreis

Die Menge aller Punkte in der Ebene, die von einem gegebenen Punkt M den gleichen Abstand r haben, heißt Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r.

4.14 Mittelsenkrechte

Die Menge aller Punkte P, die von zwei verschiedenen Punkten A und B gleichen Abstand haben, ist die Mittelsenkrechte m_{AB} auf $[AB]$.

2. Fall: $m \neq n$
$\Longrightarrow \; mx + t = nx + u \;\Longrightarrow\; (m-n)x = u - t \;\xrightarrow{m \neq n}\; x = \frac{u-t}{m-n}$
$\Longrightarrow \; \exists x$, sodass g und h einen Punkt P gemeinsam haben.

Insgesamt folgt also die Behauptung.

□

Beh: Die gegenüberliegenden Seiten eines Parallelogramms sind gleich lang.

Beweis

Sei $\square ABCD$ ein Parallelogramm mit $[AB] \parallel [CD]$ und $[BC] \parallel [AD]$.
Die Diagonale $[AC]$ teilt das Viereck in zwei Dreiecke, welche beide die Seite $[AC]$ besitzen.
$\sphericalangle DCA = \sphericalangle BAC$ (Wechselwinkel)
$\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACB$ (Wechselwinkel)
Nach Kongruenzsatz WSW gilt: $\Delta ABC \cong \Delta ACD$
Somit folgt sofort: $\overline{AB} = \overline{CD}$ und $\overline{BC} = \overline{AD}$

□

Beh: Diagonalen im Parallelogramm halbieren sich gegenseitig.

Beweis

Sei $\square ABCD$ ein Parallelogramm mit $[AB] \parallel [CD]$, $[BC] \parallel [AD]$, $\overline{AB} = \overline{CD}$ und $\overline{BC} = \overline{AD}$. Ferner sei S der Schnittpunkt der Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$.
Nach Kongruenzsatz WSW gilt: $\Delta ABS \cong \Delta SCD$, wegen

- $\overline{AB} = \overline{CD}$ (nach Voraussetzung)
- $\sphericalangle BAS = \sphericalangle DCS$ (Wechselwinkel)
- $\sphericalangle SBA = \sphericalangle SDC$ (Wechselwinkel)

Somit folgt sofort: $\overline{AS} = \overline{SC}$ und $\overline{BS} = \overline{SD}$

□

Beh: Die drei Seitenhalbierenden im Dreieck haben einen gemeinsamen Schnittpunkt.

Beweis

Seien ΔABC ein Dreieck, D der Mittelpunkt von $[BC]$, E der Mittelpunkt von $[AC]$ und F der Mittelpunkt von $[AB]$. Ferner sei S der Schnittpunkt von $[AD]$ und $[BE]$.

Dann gilt: $\frac{\overline{CB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CE}} = \frac{2}{1}$

Mit der Umkehrung der Strahlensätze folgt: $[AB] \parallel [ED]$ und $\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} = \frac{2}{1}$

ΔABS und ΔESD sind ähnlich, wegen

- Übereinstimmung im Scheitelwinkel: $\sphericalangle DSE = \sphericalangle ASB$
- Übereinstimmung der Wechselwinkel: $\sphericalangle BAS = \sphericalangle EDS$

Damit gilt: $\frac{\overline{AS}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{BS}}{\overline{SE}} = \frac{2}{1}$

Beh: Zwei Stufenwinkel $\alpha = w(p,g)$ und $\beta = w(h,g)$ sind genau dann kongruent, wenn p und h parallele Geraden sind.

Beweis

($\Rightarrow$)

Seien α und β kongruent. Scheitel und ein Schenkel liegen jeweils auf g. Verschiebe den Scheitel von α entlang der Geraden g auf den Scheitel von β. Da eine Translation winkeltreu ist, wird α auf β abgebildet und folglich p auf h. Da bei Translationen Geraden auf parallele Geraden abgebildet werden, ist p parallel zu h.

($\Leftarrow$)

Seien p und h parallel. Verschiebe den Scheitel von α auf den Scheitel von β entlang der Geraden g. Dann wird p auf h abgebildet und folglich α auf β. Da eine Translation winkeltreu ist, gilt: α ist kongruent zu β.

□

Beh: Zwei Wechselwinkel $\alpha = w(p,h)$ und $\beta = w(h,g)$ sind genau dann kongruent, wenn p und h parallel sind.

Beweis

Betrachte den Winkel γ. Es gilt: γ ist Stufenwinkel zu α und Scheitelwinkel zu β.
Die Stufenwinkel γ und α sind genau dann kongruent, wenn p und h parallele Geraden sind.
Die Scheitelwinkel γ und β sind immer kongruent.
Damit sind die Wechselwinkel α und β genau dann kongruent, wenn p und h parallele Geraden sind.

□

Beh: Ein Viereck mit drei rechten Winkeln ist ein Rechteck.

Beweis

Es gilt: Die Winkelsumme im Viereck beträgt 360°.
$\Longrightarrow$ $360° - 3 \cdot 90° = 90°$
$\Longrightarrow$ auch der vierte Winkel hat ein Winkelmaß von 90°
$\Longrightarrow$ Das Viereck ist ein Rechteck.

□

Beh: Zwei verschiedene Geraden g und h haben höchstens einen Punkt P gemeinsam.

Beweis

Seien $g(x) = mx + t$ und $h(x) = nx + u$ mit $m,n,t,u \in \mathbb{R}$ zwei verschiedene Geraden.

1. Fall: $m = n$
$\Longrightarrow mx + t = mx + u \Longrightarrow t = u$
Dies gilt nur dann, wenn g und h identisch sind und steht im Widerspruch zur Voraussetzung.
$\Longrightarrow$ Für $t \neq u$ gibt es KEINEN Punkt P, den g und h gemeinsam haben.

4.15 Mittelpunktswinkel, Umfangs- bzw. Randwinkel

Seien A und B zwei verschiedene Punkte eines Kreises mit Mittelpunkt M. Dann heißt der Winkel AMB Mittelpunktswinkel.
Sei C ein Punkt des Kreises, der bezüglich der Geraden AB in derselben Halbebene wie M liegt. Dann heißt der Winkel ACB der zum Winkel AMB gehörige Umfangs- bzw. Randwinkel.

4.16 symmetrisch (Abbildungsgeometrie)

Eine Figur heißt symmetrisch, wenn es eine Kongruenzabbildung gibt, welche die Figur auf sich selbst abbildet.

Bemerkung: Figur und Bildfigur sind identisch, das heißt invariant unter dieser Abbildung.

4.17 Kongruenzabbildung

Eine längentreue Abbildung der Ebene auf sich selbst heißt Kongruenzabbildung.

Formaler: Sei E eine Ebene. Dann heißt $f\colon E \to E$ mit $\overline{f(A)f(B)} \cong \overline{AB}$ für alle $A,B \in E$ Kongruenzabbildung.

4.18 kongruent (Abbildungsgeometrie)

Zwei geometrische Figuren heißen genau dann kongruent, wenn es eine Kongruenzabbildung gibt, welche die Figur auf die andere abbildet.

Bemerkung: entspricht der Vorstellung „deckungsgleich“

4.19 Fixpunkt, Fixgerade, Fixpunktgerade

Sind ein Punkt und sein Bild unter einer Abbildung identisch, so heißt ein solche Punkt Fixpunkt der Abbildung.
Sind eine Gerade und ihr Bild unter einer Abbildung identisch, so heißt eine solche Gerade Fixgerade.
Sind alle Punkte einer Geraden Fixpunkte, so heißt diese Fixpunktgerade.

4.20 Spiegelbild

Seien A und B zwei verschiedene Punkte einer Geraden g und P ein Punkt, der NICHT auf g liegt. Ist P' ein von P verschiedener Punkt, für den $[AP] \cong [AP']$ und $[BP] \cong [BP']$ gilt, so heißt P' Spiegelbild von P bzgl. der Geraden g.

4.21 Achsenspiegelung

Eine Abbildung der Ebene auf sich, die jedem Punkt P sein Spiegelbild P' bezüglich der Geraden g zuordnet, heißt Achsenspiegelung.
Die Gerade g heißt Spiegelachse.

4.22 gleichsinnig orientiert

Zwei kongruente Figuren heißen gleichsinnig orientiert, wenn die eine durch die Hintereinanderausführung einer geraden Anzahl von Achsenspiegelungen auf die andere abgebildet werden kann.

4.23 Punktspiegelung

- Eine Abbildung φ_M der Ebene auf sich heißt Punktspiegelung, wenn sie genau einen Fixpunkt M besitzt und jedem Punkt P den Bildpunkt P' so zuordnet, dass M die Strecke $[PP']$ halbiert.
  M heißt Zentrum der Punktspiegelung.
- Bei einer Punktspiegelung am Punkt M liegen jeder Punkt und sein Bild auf einer Geraden durch M gleichweit entfernt von M.

4.24 Drehung

- Eine Abbildung $D_{M,\alpha}$ der Ebene auf sich heißt Drehung, wenn sie einen Fixpunkt M besitzt und wenn für jeden von M verschiedenen Punkt P und sein Bild P' gilt, dass $\overline{MP} = \overline{MP'}$ und Winkel $PMP' = \alpha$ ist.
  M heißt Drehpunkt und α Drehwinkel.
- Bei einer Drehung werden alle Punkte einer Figur auf Kreisen mit dem gleichen Mittelpunkt M in gleichem Drehsinn um gleich große Winkel gedreht.

4.25 Translation (Parallelverschiebung)

- Eine Abbildung der Ebene auf sich heißt Parallelverschiebung oder Translation, wenn sie als Hintereinanderausführung von zwei Achsenspiegelungen S_g und S_h an parallelen Achsen g und h dargestellt werden kann.
- Bei einer Parallelverschiebung bewegen sich alle Punkte auf zueinander parallelen Geraden gleich weit in gleicher Richtung.

4.26 Dilatation (zentrische Streckung)

Eine Abbildung der Ebene auf sich heißt Dilatation (zentrische Streckung) genau dann, wenn sie jede Gerade auf eine zu ihr parallele Gerade abbildet und einen Fixpunkt hat.

Bemerkung: Man könnte die zentrische Streckung also auch „Parallelvergrößerung“ nennen.

4.27 Ähnlichkeitsabbildung

Unter Ähnlichkeitsabbildung versteht man die Hintereinanderausführung einer endlichen Anzahl von zentrischen Streckungen und Kongruenzabbildungen.

4.28 Drehstreckung

Eine Verknüpfung einer Drehung und einer Streckung mit identischem Zentrum heißt Drehstreckung.

Beh: Kongruenzabbildungen sind bijektiv und damit umkehrbar

Beweis

Zwei verschiedene Punkte können NICHT den gleichen Bildpunkt haben, da der Abstand erhalten bleibt (injektiv).
Umgekehrt gibt es zu jedem Punkt X ein Urbild. Denn sei P ein Punkt und P' sein Bildpunkt. Schlage um P einen Kreis, dessen Radius kongruent zur Strecke $[P'X]$ ist. Betrachte nun die Bilder der Punkte auf der Kreislinie: sie bilden einen Kreis um P', auf dem auch X liegt. Damit hat X ein Urbild (surjektiv).

□

Beh: Kongruenzabbildungen sind geradentreu (das heißt, Geraden werden auf Geraden abgebildet).

Beweis

Seien A, B und C verschiedene Punkte auf einer Geraden, wobei ohne Einschränkung B zwischen A und B liegt.
Annahme: Der Bildpunkt B' liegt NICHT auf der Geraden durch die Bildpunkte $A'C'$.
Da $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, folgt auch $\overline{A'B'} + \overline{B'C'} = \overline{A'C'}$.
Dies ist aber NICHT möglich (Dreiecksungleichung).

□

Beh: Kongruenzabbildungen sind parallelentreu.

Beweis

Da die Abbildungen bijektiv und geradentreu sind, ist die Anzahl der Schnittpunkte zweier Geraden gleich der Anzahl der Schnittpunkte der Bildgeraden.

□

Beh: Zwei Nebenwinkel ergeben zusammen 180°.

Beweis

Folgt unmittelbar aus der Definition: Gerade entspricht einem gestreckten Winkel

□

Beh: Scheitelwinkel sind gleich groß.

Beweis

Seien β und γ Scheitelwinkel. Dann gibt es einen gemeinsamen Nebenwinkel α, sodass $\alpha + \beta = 180°$ und $\alpha + \gamma = 180°$. Es folgt $\beta = \gamma$.

□

Beh: $\frac{1}{9} = 0.\overline{1}$

Beweis

$$0.111111\ldots = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots = \frac{1}{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

Mit geometrischer Reihe folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{9}$$

□

Beh: $0.\overline{9} = 1$

Beweis

Sei $0.\overline{9} = a$. Dann gilt: $10a = 9.\overline{9}$
$\iff 10a - a = 9.\overline{9} - 0.\overline{9} \iff 9a = 9 \iff a = 1$

□

Beweis (Alternative)

Es gilt: $\frac{1}{9} = 0.\overline{1}$. Also folgt: $0.\overline{9} = 9 \cdot 0.\overline{1} = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$

□

Beh: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis

Sei $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ mit $m,n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ und $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$.
$\implies 2n^2 = m^2$
Da $2n^2$ gerade ist für alle $n \in \mathbb{Z}$, muss auch m^2 eine gerade Zahl sein und somit den Teiler 2 besitzen. Dann muss aber bereits m den Teiler 2 besitzen. Also ist m^2 durch 4 teilbar. Folglich ist n^2 und damit auch n durch 2 teilbar. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $\mathrm{ggT}(n,m) = 1$.
$\implies \sqrt{2}$ ist irrational.

□

Beh: $\sqrt{21}$ ist irrational.

Beweis

Sei $\sqrt{21} = \frac{m}{n}$ mit $m,n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ und $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$.
$\implies 21n^2 = m^2 \implies 21 \mid m^2 \implies 21 \mid m \overset{(*)}{\implies} 21 \mid n^2 \implies 21 \mid n$
Dies steht im Widerspruch zu $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$.
$\implies \sqrt{21}$ ist irrational.

□

$(*)$ ergibt sich aus der Substitution $m = 21 \cdot m'$, woraus folgt: $21n^2 = 21^2 m'^2$

4.29 Spiegelstreckung

Eine Verknüpfung einer Achsenspiegelung und einer Streckung mit Zentrum auf der Achse heißt Spiegelstreckung.

4.30 Stufenwinkel

Zwei Winkel $\alpha = w(p,g)$ und $\beta = w(h,g)$ heißen genau dann Stufenwinkel, wenn je ein Schenkel der beiden Winkel auf einer gemeinsamen Geraden g liegt und die beiden anderen Schenkel bezüglich g in derselben Halbebene liegen.

4.31 Dreieck

Ein Dreieck ist die Vereinigung der Strecken zwischen drei verschiedenen Punkten, die NICHT auf einer Geraden liegen.

4.32 Höhen im Dreieck

Sei ABC ein Dreieck. Dann heißen die Senkrechten der Geraden AB, AC und BC, die jeweils durch die gegenüberliegenden Punkte C, B und A gehen, Höhengeraden des Dreiecks.
Die (Maße der) Strecken auf den Höhengeraden vom Eckpunkt des Dreiecks zur gegenüberliegenden Geraden heißen Höhen des Dreiecks.

4.33 Seitenhalbierende des Dreiecks

Die Geraden, die durch den Mittelpunkt einer Dreiecksseite und den gegenüberliegenden Eckpunkt bestimmt sind, heißen Seitenhalbierende des Dreiecks.

4.34 Quadrat

Ein Viereck mit vier kongruenten Seiten und vier rechten Winkeln heißt Quadrat.

4.35 Rechteck

Ein Viereck heißt Rechteck, falls alle Winkel rechte Winkel sind.

4.36 Raute

Ein Viereck mit vier kongruenten Seiten heißt Raute oder Rhombus.

4.37 Parallelogramm

Ein Viereck, dessen gegenüberliegende Seiten jeweils parallel sind, heißt Parallelogramm.

4.38 Trapez

Ein Viereck mit zwei parallelen Seiten heißt Trapez.

4.38.1 gleichschenkliges Trapez

Ein Viereck mit zwei Paaren kongruenter benachbarter Winkel heißt gleichschenkliges Trapez.

4.39 Drachen

Ein Viereck, dessen eine Diagonale durch die andere halbiert wird, heißt (schiefer) Drachen.

4.39.1 symmetrischer Drachen

Ein Viereck, bei dem eine Diagonale auf einer Symmetrieachse liegt, heißt symmetrischer Drachen.

4.40 Sinus

In ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken ist das Verhältnis der Längen von Gegenkathete und Hypotenuse immer gleich. Es hängt NICHT von der Länge der Seiten, sondern nur von der Größe des Winkels ab.
Dieses Verhältnis nennt man Sinus eines Winkels.
Sinuswerte sind Quotienten von Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck. Sie sind unbenannte Zahlen.
Da die Hypotenuse immer länger ist als die Gegenkathete, gibt es nur Sinuswerte zwischen 0 und 1.

$$\text{Sinus}(\alpha) = \sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

4.41 Tangens

In ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken ist das Verhältnis der Längen von Gegenkathete und Ankathete immer gleich. Es hängt NICHT von der Länge der Seiten, sondern nur von der Größe des Winkels ab.
Dieses Verhältnis nennt man Tangens eines Winkels.
Tangenswerte sind Quotienten von Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck. Sie sind unbenannte Zahlen.
Der Tangenswert ist umso kleiner, je kleiner der Winkel ist.

$$\text{Tangens}(\alpha) = \tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

V Definitionen nach [RR01]

5.1 Menge

Eine Menge ist die Zusammenfassung unterscheidbarer Dinge zu einem Ganzen.

5.2 Teilmenge

B heißt Teilmenge von A, wenn jedes Element von B auch Element von A ist.

5.3 Aufrunden

Die zu rundende Ziffer wird um 1 erhöht, wenn eine der Ziffern 5, 6, 7, 8 oder 9 folgt. Die nachfolgenden Ziffern werden durch Nullen ersetzt.

XI Beweise

Beh: Gilt $a \mid b$ und $a \mid c$, so folgt $a \mid (b+c)$.

Beweis

$$a \mid b \implies \exists k:\ b = k \cdot a$$

$$a \mid c \implies \exists l:\ c = l \cdot a$$

$$\implies b + c = k \cdot a + l \cdot a = (k+l) \cdot a$$

$$\implies \exists (k+l):\ b + c = (k+l) \cdot a$$

$$\implies a \mid (b+c)$$

□

Beh: Gilt $a \mid b$ und $a \mid c$ für $b > c$, so folgt $a \mid (b-c)$

Beweis

$$a \mid b \implies \exists k:\ b = k \cdot a$$

$$a \mid c \implies \exists l:\ c = l \cdot a$$

$$\implies b - c = k \cdot a - l \cdot a = (k-l) \cdot a$$

$$\implies \exists (k-l):\ b - c = (k-l) \cdot a$$

$$\implies a \mid (b-c)$$

□

Beh: Gilt $a \mid b$, so folgt für jede Zahl n: $a \mid (n \cdot b)$

Beweis

$$a \mid b \implies \exists k:\ b = k \cdot a$$

$$\implies n \cdot b = n \cdot k \cdot a = (n \cdot k) \cdot a$$

$$\implies \exists (n \cdot k):\ n \cdot b = (n \cdot k) \cdot a$$

$$\implies a \mid (n \cdot b)$$

□

8.9 Hypotenuse

Im rechtwinkligen Dreieck ist die größte Seite die Hypotenuse. Sie liegt dem rechten Winkel gegenüber.

IX Definitionen nach [RR06]

9.1 Quadratwurzel

Die nicht negative Lösung der Gleichung $x^2 = a$ mit $a \in \mathbb{Q}_0^+$ heißt Quadratwurzel aus a.

9.2 Zerlegungsgleichheit

Zwei Figuren heißen zerlegungsgleich, wenn sie sich in paarweise kongruente Teilfiguren zerlegen lassen.
Zerlegungsgleiche Figuren haben gleichen Flächeninhalt.

X Definitionen nach [RR08]

10.1 Logarithmusfunktion

Die Funktion f mit $y = \log_a(x)$ und $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ heißt Logarithmusfunktion zur Basis a.

5.4 Abrunden

Die zu rundende Ziffer bleibt unverändert, wenn eine der Ziffern 0, 1, 2, 3 oder 4 folgt. Die nachfolgenden Ziffern werden durch Nullen ersetzt.

5.5 Eigenschaften der Ebene

Die Ebene $\mathbb{E}$ ist eine Punktmenge mit unendlich vielen Elementen. Jeder einzelne Punkt ist Element der Ebene. Sie ist nach allen Seiten unbegrenzt.

5.6 Eigenschaften von Geraden

Eine Gerade ist eine Menge von unendlich vielen Punkten. Sie ist nach beiden Seiten unbegrenzt.

5.7 Gerade

Eine Gerade ist durch zwei Punkte eindeutig festgelegt.

5.8 Halbgerade

Von einem Punkt begrenzter Teil einer Geraden heißt Halbgerade.

5.9 Strecke

Ein von zwei Punkten begrenzter Teil einer Geraden heißt Strecke.

5.10 Existenz einer Senkrechte

Zu einer Geraden gibt es durch einen Punkt genau eine Senkrechte.

5.11 parallele Geraden

Zwei Geraden heißen zueinander parallel, wenn sie beide zu einer dritten Geraden senkrecht sind.

5.12 Parallelenaxiom

Zu einer Geraden gibt es durch einen Punkt genau eine Parallele.

5.13 Prisma

Verschiebt man ein Vieleck (Dreieck, Viereck, Fünfeck . . .) senkrecht zur Ebene dieses Vielecks, so erhält man einen Körper, den man (gerades) Prisma nennt.

5.14 Teilbarkeit einer Summe

Sind zwei Zahlen a und b durch n teilbar, so ist auch ihre Summe durch n teilbar.

5.15 Teilbarkeit eines Produkts

Ist eine Zahl a durch n teilbar, so ist auch jedes Produkt mit dem Faktor a durch n teilbar.

5.16 Teilbarkeit durch Stufenzahlen

Besitzt eine natürliche Zahl genau 1/2/3 Endnullen, dann ist sie durch 10/100/1000 teilbar.

5.17 Teilbarkeit durch Zweier- und Fünferpotenzen

Besitzt eine Zahl 1/2/3 Endnullen, dann ist sie durch 2/4/8 und 5/25/125 teilbar.

5.18 Teilbarkeit durch 2 und 5

Eine Zahl ist genau dann durch 2 oder 5 teilbar, wenn die letzte Ziffer durch diese Zahl teilbar ist.

5.19 Teilbarkeit durch 4 und 25

Eine Zahl ist genau dann durch 4 oder durch 25 teilbar, wenn die Zahl aus den letzten beiden Ziffern durch diese Zahl teilbar ist.

5.20 Teilbarkeit durch 8 und 125

Eine Zahl ist genau dann durch 8 oder durch 125 teilbar, wenn die Zahl aus den letzten drei Ziffern durch diese Zahl teilbar ist.

5.21 Teilbarkeit durch 3

Eine natürliche Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

5.22 Teilbarkeit durch 9

Eine natürliche Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

5.23 Primzahl

Eine Zahl, deren Teilermenge genau zwei Elemente besitzt, heißt Primzahl.

5.24 Bestimmung des ggT aus der Primfaktorzerlegung

Man bildet das Produkt aller gemeinsamen Primfaktoren in der jeweils niedrigsten vorkommenden Potenz.

5.25 Bestimmung des kgV aus der Primfaktorzerlegung

Man bestimmt das kgV zweier Zahlen aus der Primfaktorzerlegung, indem man das Produkt aller auftretenden Primfaktoren in der jeweils höchsten vorkommenden Potenz nimmt.

7.16 Mittelparallele

Der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei gegebenen Parallelen gleichen Abstand haben, ist ihre Mittelparallele.

$$m = \left\{ P \;\middle|\; d(P;p_1) = d(P;p_2) \right\}$$

VIII Definitionen nach [RR96]

8.1 Minimum

Terme der Form $ax^2 + c$ mit $a > 0$ besitzen für $x = 0$ ein Minimum mit dem Wert c. ($a,c \in \mathbb{Q}$)

8.2 Maximum

Terme der Form $ax^2 + c$ mit $a < 0$ besitzen für $x = 0$ ein Maximum. Dieses hat den Wert c.

8.3 Extremwerte quadratischer Terme

(1) Der Term $a \cdot (x+b)^2 + c$ hat für $x = -b$ den Extremwert c.

(2) Für $a > 0$ liegt ein Minimum vor.
Für $a < 0$ liegt ein Maximum vor.
$a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \qquad b,c,x \in \mathbb{Q}$

8.4 Definitionsmenge

Die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ eines Terms bezüglich seiner Grundmenge $\mathbb{G}$ ist die Menge aller Elemente aus $\mathbb{G}$, für die der Termwert berechenbar ist.

8.5 Produktmenge

Die Produktmenge $M_1 \times M_2$ ist die Menge aller geordneten Paare $(x|y)$ mit $x \in M_1$ und $y \in M_2$.

8.6 Funktion

Ordnet eine Relation jedem Element der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ genau ein Element der Wertemenge $\mathbb{W}$ zu, so nennt man sie Funktion in $\mathbb{D} \times \mathbb{W}$.

8.7 Umkehrrelation

(1) Die Umkehrrelation entsteht durch Vertauschen der Variablen in der Relationsvorschrift.

(2) Den Graphen der Umkehrrelation erhält man aus dem Graphen der Relation durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.

8.8 Umkehrbarkeit einer Funktion

Eine Funktion heißt umkehrbar, wenn die zugehörige Umkehrrelation wieder eine Funktion ist.

7.8 Drehsymmetrie

Eine Figur heißt drehsymmetrisch zum Winkel α mit dem Zentrum Z, wenn sie nach Drehung um Z mit α mit sich selbst zur Deckung kommt.

7.9 Kreis

Der Kreis k um M mit Radius r, kurz $k(M;r)$, ist der geometrische Ort aller Punkte P, die vom Punkt M die Entfernung r haben.

7.10 Mittelsenkrechte

Der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei Punkten gleiche Entfernung haben, ist die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke der beiden Punkte.

$$m_{[AB]} = \left\{ P \;\middle|\; \overline{AP} = \overline{BP} \right\}$$

7.11 Halbebene

Der geometrische Ort aller Punkte, die vom Endpunkt A einer Strecke $[AB]$ ein kleinere (größere) Entfernung als von B haben, ist die Halbebene bezüglich $m_{[AB]}$, in der A (B) liegt.

$$\mathbb{H}_A = \left\{ P \;\middle|\; \overline{AP} < \overline{BP} \right\} \qquad \mathbb{H}_B = \left\{ P \;\middle|\; \overline{AP} > \overline{BP} \right\}$$

7.12 Winkelhalbierende

Der geometrische Ort aller Punkte, die von den Schenkeln eines Winkels gleichen Abstand haben, ist die Halbierende des Winkels.

$$w_\alpha = \left\{ P \;\middle|\; d(P;g) = d(P;h) \right\}$$

wobei $\alpha = \sphericalangle(g;h)$

7.13 Umkreis des Dreiecks

Jedes Dreieck besitzt einen Umkreis. Sein Mittelpunkt M_u ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten. Sein Radius r_u ist die Entfernung von M_u zu den Eckpunkten.

7.14 Inkreis des Dreiecks

Jedes Dreieck besitzt einen Inkreis. Sein Mittelpunkt M_i ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Sein Radius r_i ist der Abstand von M_i zu den Seiten.

7.15 Parallelenpaar zu einer Gerade

Der geometrische Ort aller Punkte, die von einer gegebenen Geraden den gleichen Abstand a haben, ist das Parallelenpaar zur Geraden g im Abstand a.

$$p_1 \cup p_2 = \left\{ P \;\middle|\; d(P;g) = a \right\}$$

VI Definitionen nach [RR02]

6.1 Bruch

Ein Bruch ist eine andere Schreibweise für einen Quotienten. Es gilt:

$$\frac{a}{b} = a : b \qquad a \in \mathbb{N}_0 \quad b \in \mathbb{N}$$

6.2 Äquivalenz von Gleichungen (Ungleichungen)

Zwei Gleichungen (Ungleichungen), welche bei gleicher Grundmenge die gleiche Lösungsmenge besitzen, heißen äquivalent.

6.3 teilgültige Gleichung (Ungleichung)

Eine Gleichung (Ungleichung) heißt teilgültig in $\mathbb{G}$, wenn $\mathbb{L}$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{G}$ ist.

6.4 allgemein gültige Gleichung (Ungleichung)

Eine Gleichung (Ungleichung) heißt allgemein gültig in $\mathbb{G}$, wenn $\mathbb{L}$ gleich $\mathbb{G}$ ist.

6.5 unerfüllbare Gleichung (Ungleichung)

Eine Gleichung (Ungleichung) heißt unerfüllbar in $\mathbb{G}$, wenn $\mathbb{L}$ die leere Menge ist.

6.6 Äquivalenzumformung

- Addiert bzw. subtrahiert man zum Linksterm und zum Rechtsterm einer Gleichung die gleiche Zahl, so erhält man eine Gleichung, die zur ursprünglichen äquivalent ist.
- Liest man eine Gleichung von rechts nach links, so erhält man eine dazu äquivalente Gleichung.
- Multipliziert/dividiert man den Linksterm und den Rechtsterm einer Gleichung mit/durch der/die gleiche(n) Zahl, so erhält man eine Gleichung, die zur ursprünglichen äquivalent ist.

Bemerkung: Quadrieren eine Gleichung ist KEINE Äquivalenzumformung!

6.7 Direkte Proportionalität

Durch eine direkte Proportionalität werden Zahlenpaare $(x|y)$ festgelegt, für die gilt:

$$y = k \cdot x \qquad x,y,k \in \mathbb{Q}^+$$

6.8 Achsenspiegelung

$$P \xmapsto{a} P'$$

Bestimmungsstück: Spiegelachse a
Abbildungsvorschrift: Für $P \in a$ gilt: $P = P'$.

Für $P \notin a$ gilt:

(1) Der Bildpunkt P' liegt auf der Senkrechten s zur Spiegelachse a durch den Urpunkt P.

(2) Der Bildpunkt P' hat von der Spiegelachse a den gleichen Abstand wie der Urpunkt P.

6.9 Fixpunkt

F ist Fixpunkt, wenn gilt: $F' = F$
Jeder Punkt der Spiegelachse a ist Fixpunkt.

6.10 Fixgerade

g ist Fixgerade, wenn gilt: $g' = g$
Die Spiegelachse a und jede Senkrechte dazu ist Fixgerade.

6.11 Fixkreis

k ist Fixkreis, wenn gilt: $k' = k$
Jeder Kreis mit dem Mittelpunkt auf der Spiegelachse a ist Fixkreis.

6.12 Achsensymmetrie

Eine Figur, die durch Achsenspiegelung auf sich selbst abgebildet werden kann, heißt achsensymmetrisch.
Die Spiegelachse heißt Symmetrieachse.

6.13 (Achsensymmetrischer) Drachen

- zwei Paare gleich langer Seiten
- ein Paar gleich großer Winkel
- die anderen Winkel werden durch die Achse halbiert

6.14 gleichschenkliges Trapez (achsensymmetrisch)

- zwei Paare gleich großer Winkel
- ein Paar gleich langer Seiten
- die anderen Seiten sind parallel und werden durch die Achse halbiert

VII Definitionen nach [RR04]

7.1 Direkte Proportionalität

$$y = k \cdot x \iff \frac{y}{x} = k \qquad x,y \in \mathbb{Q}^+$$

7.2 Indirekte Proportionalität

$$x \cdot y = k \iff y = \frac{k}{x} \qquad x,y \in \mathbb{Q}^+$$

7.3 Parallelverschiebung

$$P \xmapsto{\overrightarrow{AB}} P'$$

Die Parallelverschiebung ist die Ersatzabbildung einer Doppelachsenspiegelung an zwei zueinander parallelen Achsen.
Bestimmungsstück: Verschiebungspfeil $\overrightarrow{AB}$
Abbildungsvorschrift: Jedem Punkt P wird durch einen Verschiebungspfeil ein Punkt P' zugeordnet. Die Verschiebungspfeile sind so zu wählen, dass sie in Länge und Richtung mit $\overrightarrow{AB}$ übereinstimmen.

7.4 Fixelemente der Parallelverschiebung

Die Parallelverschiebung besitzt KEINEN Fixpunkt.
Jede Gerade in Verschiebungsrichtung ist Fixgerade.

7.5 Vektor

Die Menge aller Pfeile mit gleicher Länge und Richtung heißt Vektor. Jeder seiner Pfeile kann als Repräsentant des Vektors genommen werden.

7.6 Drehung

$$P \xmapsto{Z;\alpha} P'$$

Die Drehung um Z mit dem Winkelmaß α ist die Ersatzabbildung einer Doppelachsenspiegelung an zwei Achsen, die sich in Z unter einem Winkel vom Maß $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ schneiden. Dabei gilt: $\alpha \in]0°; 360°[$.
Bestimmungsstücke: Das Zentrum Z. Das Drehwinkelmaß (kurz der Drehwinkel) α.
Abbildungsvorschrift: Das Zentrum Z wird auf sich abgebildet.
Für jeden Punkt $P \neq Z$ gilt: P' liegt

(1) auf dem Kreis um Z durch P

(2) auf dem freien Schenkel des Winkels vom Maß α, der in Z an $[ZP$ angetragen wird.

7.7 Punktspiegelung

$$P \xmapsto{Z} P'$$

Die Punktspiegelung ist der Spezialfall einer Drehung mit $\alpha = 180°$.
Bestimmungsstück: Spiegelzentrum Z.
Abbildungsvorschrift: Das Zentrum Z wird auf sich abgebildet.
Für jeden Punkt $P \neq Z$ gilt: P' liegt

(1) auf dem Kreis um Z durch P

(2) auf der Halbgeraden $[PZ$