Staatsexamen LAGeo

(Lehramt, nicht-vertieft)

Frühjahr 2015

Julian Palme

(Stand: 6. Februar 2015)

Dies ist ein selbst erstelltes Skript auf der Basis alter Staatsexamensaufgaben und der Quellen im Quellenverzeichnis. Dieses Dokument ist KEIN offizielles Skript und wurde gesetzt in LaTeX von Julian Palme.

Inhaltsverzeichnis

I Lineare Gleichungssysteme 7
1.1 Lineares Gleichungssystem (Def) 7
1.2 Elementare Zeilenoperationen (Def) 7
1.3 Rang (Def) 7
1.4 Invertierbare Matrizen (Def) 7
1.5 Umformen in normlaisierte Zeilenstufenform (Satz) 7
1.6 Struktursatz für lineare Gleichungssysteme (Satz) 7
1.7 Invertierbarkeit einer Matrix (Satz) 8
1.8 Invertieren einer Matrix 8
1.8.1 mit Hilfe der Einheitsmatrix 8
1.8.2 mit Hilfe der Determinate und der adjunkten Matrix 8
1.9 Adjunkte Matrix 8
1.10 Kriterium zur Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme (Satz) 9

II Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit 9
2.1 Eigenwert und Eigenvektor (Def) 9
2.2 Diagonalisierbarkeit (Def) 9
2.3 Charakteristisches Polynom (Def) 10
2.4 Eigenraum (Def) 10
2.5 Eigenraum (Satz) 10
2.6 Algebraische und geometrische Vielfachheit (Def) 10
2.7 Folgerung 10
2.8 Eigenwert und Invertierbarkeit (Bem) 10
2.9 Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren (Satz) 11
2.10 Zusammenhang von Eigenwerten und charakteristischem Polynom (Satz) 11
2.11 Diagonalisierbarkeitskriterium (Satz) 11
2.12 Basistransformationsmatrix (Satz) 11
2.13 ähnliche Matrizen (Satz) 11
2.14 ähnliche Matrizen (Bem) 11
2.15 Satz von Cayley-Hamilton (Satz) 12

III Quadratische Matrizen 12
3.1 Spezielle Matrizen (Def) 12
3.2 Ähnliche Matrizen (Def) 12
3.3 Spur (Def) 12
3.4 Produkt invertierbarer Matrizen (Satz) 13

IV Vektorräume 13
4.1 Vektorraum, Vektoren (Def) 13
4.2 Untervektorraum (Def) 14
4.3 Linearkombination (Def) 14
4.4 Span, Erzeugnis (Def) 14
4.5 Linear unabhängige Vektoren (Def) 14
4.6 Erzeugendensystem (Def) 14
4.7 Basis (Def) 15
4.8 Dimension (Def) 15
4.9 Äquivalenzen zur Basiseigenschaft (Satz) 15
4.10 Basisauswahlsatz (Satz) 15
4.11 Basis endlich erzeugter Vektorräume (Satz) 15
4.12 Existenz einer Basis (Satz) 15
4.13 Austauschlemma (Satz) 15

4.14	Austauschsatz (Satz)	16
4.15	Austauschlemma und Austauschsatz (Bem)	16
4.16	Basisergänzungssatz (Satz)	16
4.17	Wohldefiniertheit der Dimension (Satz)	16
4.18	Eigenschaften von Untervektorräumen (Satz)	16
4.19	Prinzip der linearen Fortsetzung (Satz)	16
V	**Lineare Abbildungen**	**17**
5.1	Lineare Abbildung (Def)	17
5.2	Kern einer linearen Abbildung (Def)	17
5.3	Kern einer Matrix (Def)	17
5.4	Bild einer linearen Abbildung (Def)	17
5.5	Bild einer Matrix (Def)	17
5.6	Darstellungsmatrix (Def)	17
5.7	Transformationsmatrix (Def)	18
5.8	Injektivität (Satz)	18
5.9	Bild und Kern einer linearen Abbildung als Untervektorräume (Satz)	18
5.10	Basistransformationsmatrizen mit zwei Basen (Satz)	18
5.11	Basistransformationsmatrizen mit drei Basen (Satz)	18
5.12	Basiswechselsatz (Satz)	18
5.13	Dimensionsstz, Kern-Bild-Satz (Satz)	18
5.14	Surjektivität (Satz)	19
5.15	Dimensionsformel (Satz)	19
VI	**Euklidische Vektorräume**	**19**
6.1	Standardskalarprodukt, euklidischer Vektorraum (Def)	19
6.2	Länge eines Vektors (Def)	19
6.3	Winkel zwischen Vektoren (Def)	19
6.4	Bilinearform (Def)	19
6.5	Symmetrische Bilinearform (Def)	20
6.6	Darstellende Matrix (Def)	20
6.7	Orthonormalbasis (Def)	20
6.8	Positiv definit (Def)	20
6.9	Koordinatenvektoren (Satz)	20
6.10	Darstellungsmatrix (Satz)	21
6.11	Hauptminorenkriterium (Satz)	21
6.12	Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt (Satz)	21
6.13	Drehwinkel und Drehachse	22
6.14	Drehmatrix (Def)	23
6.15	Drehwinkel (Def)	24
6.16	Spiegelungsmatrix (Def)	24
6.17	Spiegelung	24
VII	**Affine Mengen und Abbildungen**	**25**
7.1	Affiner Raum (Def)	25
7.2	Affine Abbildung (Def)	26
7.3	Affine Abbildung (Bem)	26
7.4	Affine Abbildung (Bem)	26
7.5	Affinität (Satz)	26
7.6	Affiner Unterraum (Satz)	27
7.7	Affiner Unterraum (Bem)	27
7.8	Bilder und Urbilder (Bem)	27
7.9	Berechnung des Bildes eines affinen Unterraums (Bem)	27
7.10	Parallele affine Unterräume (Def)	28

7.11 Erhaltung der Parallelität (Bem) . . . 28
7.12 Durchschnitt affiner Unterräume (Bem) . . . 28
7.13 Verbindungsraum, Verbindungsgerade (Def) . . . 28
7.14 Verbindungsgeraden (Bem) . . . 28
7.15 Dimensionsformel für affine Unterräume (Satz) . . . 28
7.16 Abstand zweier Punkte (Def) . . . 28
7.17 Orthogognale affine Unterräume (Def) . . . 29
7.18 Pythagoras (Satz) . . . 29
7.19 Windschiefe Geraden (Bem) . . . 29
7.20 Gemeinsames Lot (Def) . . . 29
7.21 Gemeinsames Lot (Satz) . . . 29
7.22 Abstand zweier affiner Unterräume (Def) . . . 29
7.23 Hyperebene, Normalenvektoren, Normaleneinheitsvektoren (Def) . . . 29
7.24 Hessesche Normalform (Def) . . . 30
7.25 Hessesche Normalenform (Bem) . . . 30
7.26 Winkel zwischen zwei Geraden (Def) . . . 30
7.27 Bewegung bzw. Isometrie (Def) . . . 30
7.28 (Un)eigentliche Affinität (Def) . . . 30
7.29 Fixpunkt (Def) . . . 31
7.30 Gleitspiegelung (Def) . . . 31
7.31 Bewegungen (Bem) . . . 31
7.32 Kongruente Teilmengen (Def) . . . 31
7.33 Kongruenzsatz (Satz) . . . 31
7.34 affin-unabhängig (Def) . . . 31
7.35 Kongruenz von Dreiecken (Kor) . . . 32
7.36 Umrechnung von Ebenenformen . . . 32
7.36.1 Parameterform – Normalenform – Koordinatendarstellung . . . 32
7.36.2 Koordinatendarstellung – Normalenform – Parameterform . . . 33
7.37 Schnitt zweier Ebenen . . . 33
7.37.1 Parameterform und Koordinatenform . . . 33
7.37.2 Parameterform und Parameterform . . . 34
7.38 Schnitt von Gerade und Ebene . . . 34

VIII Kegelschnitte und Quadriken **34**
8.1 Kegelschnitt, Quadrik (Def) . . . 34
8.2 Normalformen der Kegelschnitte . . . 35
8.3 Hauptachsentransformation . . . 35
8.4 Affine Normalformen von Kegelschnitten . . . 35
8.5 Metrische Normalformen von Kegelschnitten . . . 37
8.6 Rechnen mit Quadriken . . . 40
8.6.1 Berechnung des Mittelpunktes . . . 41
8.6.2 Verschiebung des Mittelpunkts in den Ursprung . . . 42
8.6.3 Hauptachsen einer Ellipse . . . 42

IX Homomorphismen **42**
9.1 Homomorphismus (Def) . . . 42
9.2 Epimorphismus (Def) . . . 42
9.3 Monomorphismus (Def) . . . 42
9.4 Isomorphismus (Def) . . . 42
9.5 Endomorphismus (Def) . . . 43
9.6 Automorphismus (Def) . . . 43
9.7 Eigenschaften von Morphismen (Satz) . . . 43
9.8 Vektorraum-Isomorphismus (Satz) . . . 43

X Determinanten **44**
10.1 Axiomatische EInführung der Determinante (Def) 44
10.2 Existenz und Eindeutigkeit der Determinante (Satz) 44
10.3 Rechenregeln und Eigenschaften der Determinante (Satz) 44

Stichwortverzeichnis

Literatur

I Lineare Gleichungssysteme

1.1 Definition (Lineares Gleichungssystem)

Ein **lineares Gleichungssystem** mit $m \in \mathbb{N}$ Gleichungen für $n \in \mathbb{N}$ Unbekannte $x_1, \ldots, x_n$ hat die Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

1.2 Definition (Elementare Zeilenoperationen)

Unter **elementaren Zeilenoperationen** verstehen wir

(1) das Addieren des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen,

(2) das Multipizieren einer GLeichung mit einer von Null verschiedenen Zahl und

(3) das Vertauschen zweier Gleichungen.

1.3 Definition (Rang)

Als **Rang** einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ bezeichnen wir die Anzahl der Zeilen in der Zeilenstufenform, die ein Element ungleich Null enthalten. Wir schreiben $\mathrm{Rang}(A)$.

1.4 Definition (Invertierbare Matrizen)

Sei $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$. Wenn eine Matrix $B \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ existiert mit $A \cdot B = B \cdot A = E_n$, dann nennen wir A **invertierbar** und $A^{-1} := B$ die **Inverse** von A. Den Raum aller invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen im Körper K bezeichnen wir mit $\mathrm{Gl}_n(K)$.

1.5 Satz (Umformen in normlaisierte Zeilenstufenform)

Jede Matrix $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ lässt sich durch elementare Zeilenoperationen in normalisierte Zeilenstufenform bringen. Wendet man das Verfahren auf die erweiterte Matrix $[A|b]$ an, so ändert sich die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ NICHT.

1.6 Satz (Struktursatz für lineare Gleichungssysteme)

Sei A eine $(m \times n)$-Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$.

- Die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.
- Sei $Ax = b$ ein lösbares lineares Gleichungssystem und sei $x_{\text{inh.spez.}}$ eine spezielle Lösung. Dann ist die allgemeine Lösung $x_{\text{inh.allg.}}$ darstellbar in der Form

$$x_{\text{inh.allg.}} = x_{\text{inh.spez.}} + x_{\text{hom.allg.}}$$

wobei $x_{\text{hom.allg.}}$ die allgemeine Lösung der Gleichung $Ax = 0$ ist.

1.7 Satz (Invertierbarkeit einer Matrix)

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix mit Einträgen aus einem Körper K. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) A ist invertierbar.

(2) $\ker(A) := \left\{ x \in K^n \;\middle|\; Ax = 0 \right\} = \{0\}$, das heißt, der Kern von A besteht nur aus dem Nullvektor. Das bedeutet, dass das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ nur den Nullvektor als Lösung besitzt.

(3) $\operatorname{im}(A) = \left\{ Ax \;\middle|\; x \in K^n \right\} = K^n$, das heißt, das Bild von A ist der gesamte Vektorraum K^n.

(4) Die Matrix besitzt vollen Rang.

(5) $\det(A) \neq 0$

1.8 Invertieren einer Matrix

Es gibt zwei Möglichkeiten, die Inverse einer Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ zu berechnen.

1.8.1 mit Hilfe der Einheitsmatrix

Schreibe die Matrix A zusammen mit der Einheitsmatrix in eine gemeinsame Matrix und trenne beide mit einem Strich ab. Ich veranschauliche diesen Prozess an einer 3×3-Matrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forme diese Matrix solange mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen um, bis die Einheitsmatrix auf der linken Seite steht. Dann ist die neue Matrix auf der rechten Seite mit Einträgen $b_{i,j}$ die inverse Matrix A^{-1} von A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & | & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & | & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

1.8.2 mit Hilfe der Determinate und der adjunkten Matrix

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$$

1.9 Adjunkte Matrix

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$.
Man erhält die **adjunkte Matrix** $\operatorname{adj}(A)$, indem man die Matrix A nach jedem Eintrag a_{kl} entwickelt. Sei k der Zeilenindex und l der Spaltenindex der Einträge der Matrix A und seien b_{ij}

die Einträge der adjunkten Matrix $\operatorname{adj}(A)$. (Zur Verdeutlichung beschränke ich mich zunächst auf eine 3×3-Matrix.) Dann gilt für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right) & (-1)^{1+2} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}\right) & (-1)^{1+3} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\right) \\ (-1)^{2+1} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right) & (-1)^{2+2} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}\right) & (-1)^{2+3} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\right) \\ (-1)^{3+1} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\right) & (-1)^{3+2} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}\right) & (-1)^{3+3} \cdot \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) \end{pmatrix}^T$$

<u>In Worten</u>: Wähle in der Matrix A einen Eintrag in der k-ten Zeile und l-ten Spalte. Streiche in der Matrix A die k-te Zeile und die l-te Spalte. Trage in der adjunkten Matrix $\operatorname{adj}(A)$ in die k-te Zeile und l-te Spalte folgendes ein:

$$(-1)^{k+l} \cdot \det(\text{Matrix } A \text{ ohne } k\text{-te Zeile und } j\text{-te Spalte})$$

Für 2×2-Matrizen $M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt:

$$\operatorname{adj}(M) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1.10 Satz (Kriterium zur Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme)

lineares Gleichungssystem besitzt (mindestens) eine Lösung $\iff$ $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}([A|b])$
Außerdem gilt: Bei einem lösbaren linearen Gleichungssystem ist die Dimension des Lösungsraums

$$\dim(\text{Lösungsraum}) = n - \operatorname{Rang}(A)$$

II Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit

2.1 Definition (Eigenwert und Eigenvektor)

(1) Sei Φ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V. $\lambda \in K$ heißt <u>**Eigenwert**</u> von Φ, wenn ein $v \in V \setminus \{0\}$ existiert mit $\Phi(v) = \lambda \cdot v$.

(2) Jedes $v \in V$, $v \neq 0$, das die Gleichung $\Phi(v) = \lambda \cdot v$ erfüllt, heißt <u>**Eigenvektor**</u> von Φ zum Eigenwert λ.

2.2 Definition (Diagonalisierbarkeit)

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $\Phi \in \operatorname{End}(V)$.

Φ <u>**diagonalisierbar**</u> $\iff$ $\exists$ Basis $\mathcal{B}$ von Φ aus Eigenvektoren
$\iff$ unter den darstellenden Matrizen von Φ gibt es Diagonalmatrizen

2.3 Definition (Charakteristisches Polynom)

Seien K ein Körper, $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ und $\lambda \in K$, dann heißt

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda \cdot x)$$

das **charakteristische Polynom** von A.

2.4 Definition (Eigenraum)

Für $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ nennen wir

$$\mathrm{Eig}(A,\lambda) := \left\{ v \in K^n \;\middle|\; Av = \lambda v \right\} = \ker(A - \lambda E)$$

den **Eigenraum** von A zum Eigenwert λ.

2.5 Satz (Eigenraum)

Sei V ein K-Vektorraum und sei $f\colon V \to V$ linear.
Dann ist für $\lambda \in K$

$$\mathrm{Eig}(f,\lambda) = \left\{ v \in V \;\middle|\; f(v) = \lambda v \right\}$$

ein Untervektorraum von V.

2.6 Definition (Algebraische und geometrische Vielfachheit)

Seien $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ eine Matrix und χ_A das dazugehörige charakteristische Polynom. Die Vielfachheit eines Eigenwertes als Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_A bezeichnet man als **algebraische Vielfachheit**. Die Dimension des Eigenraumes $\mathrm{Eig}(A,\lambda)$ wird als **geometrische Vielfachheit** von λ bezeichnet. Sie ist dabei stets mindestens eins und höchstes gleich der algebraischen Vielfachheit von λ.

Bemerkung: $\dim\left(\mathrm{Eig}(A,\lambda)\right) = n - \mathrm{Rang}(A)$

2.7 Folgerung

Ist λ Eigenwert von A, so ist λ^k für jedes $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ Eigenwert von A^k.

2.8 Bemerkung (Eigenwert und Invertierbarkeit)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$.

$$\begin{aligned}
0 \text{ Eigenwert von } A &\iff \det(A - 0 \cdot E) = 0 \\
&\iff \det(A) = 0 \\
&\iff \mathrm{Rang}(A) < n \\
&\iff A \text{ NICHT invertierbar}
\end{aligned}$$

2.9 Satz (Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren)

Seien $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ und v_i mit $i = 1, \ldots, k$ Eigenvektoren von A mit paarweise verschiedenen Eigenwerten λ_i.
Dann sind alle v_i **linear unabhängig**. Insbesondere gilt $k \leq n$.

Ist $K = \mathbb{R}$ und A symmetrisch, so stehen sie sogar senkrecht aufeinander.

2.10 Satz (Zusammenhang von Eigenwerten und charakteristischem Polynom)

Seien V ein K-Vektorraum, $\Phi \in \operatorname{End}(V)$ und χ_Φ das zugehörige charakteistische Polynom.
Dann gilt für $\lambda \in K$: λ ist Eigenwert von $\Phi \iff \chi_\Phi(\lambda) = 0$.

2.11 Satz (Diagonalisierbarkeitskriterium)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$.

A diagonalisierbar $\iff$ K^n besitzt Basis aus EV von A
$\iff$ χ_A zerfällt über K in Linearfaktoren und für jede seiner Nullstellen λ gilt:
geometrische Vielfachheit von λ = algebraische Vielfachheit von λ
$\iff$ $\exists$ invertierbare Matrix $S \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$, sodass $S^{-1}AS$ Diagonalmatrix ist

Hat $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, so ist A diagonalisierbar.

Ist $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, so ist A orthogonal diagonalisierbar.

2.12 Satz (Basistransformationsmatrix)

Matrix A diagonalisierbar $\iff$ $\exists$ Basistransformationsmatrix T, sodass $D = T^{-1}AT$ gilt, wobei D eine Diagonalmatrix darstellt

2.13 Satz (ähnliche Matrizen)

Sind A und B ähnliche Matrizen, so gilt:

$$\chi_A = \chi_B$$

2.14 Bemerkung (ähnliche Matrizen)

Ähnliche Matrizen haben ...

- gleichen Rang
- gleiche Determinante
- gleiche Spur
- gleiches charakteristisches Polynom

2.15 Satz (Satz von Cayley-Hamilton)

Sind $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ und χ_A das zugehörige charakteristische Polynom, so gilt:

$$\chi_A(A) = 0$$

III Quadratische Matrizen

3.1 Definition (Spezielle Matrizen)

(1) Ist $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, so bezeichnen wir mit $A^T \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ die eindeutige Matrix, für die $a_{ij}^T = a_{ji}\ \forall i,j$ gilt. Wir nennen A^T die **transponierte Matrix** von A.

(2) Ist $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ und gilt $A = A^T$, so nennen wir A **symmetrisch**.

(3) Ist $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ und gilt $A = -A^T$, so nennen wir A **schiefsymmetrisch**.

(4) Ist $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, so nennen wir die Matrix A^* mit $a_{ji}^* = \bar{a}_{ji}$, die **adjungierte Matrix** von A. A heißt **selbstadjungiert**, falls $A = A^*$.

(5) Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ heißt **positiv definit**, falls für alle $x \in K^n$ gilt: $x^T \cdot A \cdot x \geq 0$ und $x^T \cdot A \cdot x = 0 \iff x = 0$.

(6) Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ heißt **orthogonal**, falls $A^T \cdot A = A \cdot A^T = E_n$, also wenn gilt: $A^{-1} = A^T$. Den Raum aller orthogonalen $(n \times n)$-Matrizen bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_n(K)$.
Bemerkung: $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$

(7) Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ heißt **unitär**, falls $A^* \cdot A = A \cdot A^* = E_n$, also wenn gilt: $A^{-1} = A^*$. Dan Raum aller unitären $(n \times n)$-Matrizen bezeichnen wir mit $\mathcal{U}_n(K)$.

3.2 Definition (Ähnliche Matrizen)

Wir nennen zwei quadratische Matrizen $A,B \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ **ähnlich**, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{Gl}_n(K)$ gibt, sodass gilt: $B = S^{-1}AS$.

3.3 Definition (Spur)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dann heißt die Summe der Hauptdiagonalelemente dieser Matrix die **Spur** von A:

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} \ \in K$$

3.4 Satz (Produkt invertierbarer Matrizen)

Seian $A,B \in \mathrm{Gl}_n(K)$ invertierbar, dann gilt:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Das Produkt invertierbarer Matrizen ist also wieder invertierbar.

IV Vektorräume

4.1 Definition (Vektorraum, Vektoren)

Sei K ein Körper. Eine Menge V zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$+ \colon V \times V \to V \ , \ (a,b) \longmapsto a + b \qquad \text{und} \qquad \cdot \colon K \times V \to V \ , \ (\lambda,b) \longmapsto \lambda \cdot b$$

heißt K-**Vektorraum**, wenn gilt:

(1) Verknüpfung $+$ ist assoziativ, das heißt:

$$(x + y) + z = x + (y + z) \ \forall x,y,z \in V$$

(2) Verknüpfung $+$ ist kommutativ, das heißt:

$$x + y = y + x \ \forall x,y \in V$$

(3) $\exists$ neutrales Element bzgl. $+$, genannt 0_V (Nullvektor), das heißt

$$0_V + v = v + 0_V = v \ \forall v \in V$$

(4) Jedes Element $v \in V$ besitzt ein inverses Element bzgl. $+$, geschrieben $-v$, das heißt

$$v + (-v) = 0 \ \forall v \in V$$

(5) Verknüpfung $\cdot$ ist assoziativ, das heißt:

$$\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v \ \forall \lambda,\mu \in K, \ \forall v \in V$$

(6) Es gilt $1 \cdot v = v \ \forall v \in V$, wobei 1 das Einselement des Körpers K ist.

(7) Es gilt das Distributivgesetz:

$$\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w \ \forall \lambda \in K, \ \forall v,w \in V$$

Die Elemente $v \in V$ nennen wir nun **Vektoren**. Die Verknüpfung $+$ heißt **Vektoraddition** und $\cdot$ heißt **Skalarmultiplikation**.

4.2 Definition (Untervektorraum)

Wir nennen eine nichtleere Teilmenge $U \subset V$ **Untervektorraum**, falls gilt:

(1) $0_V \in U$

(2) $u,v \in U \implies u + v \in U$ (Abgeschlossenheit bzgl. $+$)

(3) $u \in U$, $\lambda \in K \implies \lambda u \in U$ (Abgeschlossenheit bzgl. $\cdot$)

4.3 Definition (Linearkombination)

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_k \in V$. Wir sagen ein Vektor $v \in V$ lässt sich als **Linearkombination** von $v_1, \ldots, v_k$ schreiben, wenn es $\lambda_i \in K$, $i = 1, \ldots, k$, $k \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

4.4 Definition (Span, Erzeugnis)

Sei K ein Körper, V ein Vektorraum, $v_1, \ldots, v_k \in V$. Dann setzen wir

$$\langle v_1, \ldots, v_k \rangle := \operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_k) := \left\{ v \in V \;\middle|\; v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \;,\; \lambda_i \in K \right\}$$

Wir nennen nun $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ das **Erzeugnis** oder auch den **Span** von $v_1, \ldots, v_k$. Ab und zu nennt man dies auch die **lineare Hülle**.

4.5 Definition (Linear unabhängige Vektoren)

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $v_1, \ldots, v_k \in V$. Wir nennen das System $(v_1, \ldots, v_k)$ **linear unabhängig**, wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_i = 0 \; \forall i$$

Andernfalls heißt $(v_1, \ldots, v_k)$ **linear abhängig**.

Bemerkung: Der Nullvektor ist IMMER linear abhängig.

4.6 Definition (Erzeugendensystem)

Ist I eine (Index-)Menge und V ein Vektorraum. Dann nennen wir das System $(v_i)_{i \in I}$ **Erzeugendensystem** von V, wenn es für jedes $v \in V$ und $\lambda_i \in K$ ein endliches $J \subset I$ und $i \in J$ gibt mit

$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$$

Oder anders ausgedrückt: $V = \operatorname{Span}(v_1, v_2 \ldots)$.
Gibt es solch ein I mit $|I| < \infty$, so nennen wir V **endlich erzeugt**.

4.7 Definition (Basis)

Ein System von Vektoren $\mathcal{B} \subset V$ eines Vektorraums heißt **Basis** von V genau dann, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $\mathcal{B}$ ist linear unabhängig

(2) $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem

4.8 Definition (Dimension)

Für einen K-Vektorraum definieren wir die **Dimension** als

$$\dim_K(V) := n$$

wenn V eine Basis mit n Elementen besitzt und

$$\dim_K(V) := \infty$$

falls V KEINE endliche Basis besitzt.

4.9 Satz (Äquivalenzen zur Basiseigenschaft)

Für ein endliches System $\mathcal{B} = (v_i)$ von Vektoren sind äquivalent:

(1) $\mathcal{B}$ ist Basis

(2) $\mathcal{B}$ ist unverkürzbares Erzeugendensystem, das heißt, für jedes $r \in \{1, \ldots, n\}$ ist $(v_1, \ldots, v_{r-1}, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ KEIN Erzugendensystem.

(3) Jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig als Linearkombination von Vektoren aus $\mathcal{B}$ darstellen.

(4) $\mathcal{B}$ ist unverlängerbar linear unabhängig, das heißt, linear unabhängig und für jedes $v \in V$ ist $(v_1, \ldots, v_n, v)$ linear abhängig.

4.10 Satz (Basisauswahlsatz)

Seien V ein endlich erzeugter Vektorraum und $(v_1, \ldots, v_p)$ ein endliches Erzeugendensystem. Dann können wir aus diesen Vektoren endlich viele auswählen, sodass das System $(v_{k_1}, \ldots, v_{k_n})$ eine Basis ist mit $k_i \in \{1, \ldots, p\}$.

4.11 Satz (Basis endlich erzeugter Vektorräume)

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum, dann hat V eine Basis.

4.12 Satz (Existenz einer Basis)

Jeder Vektorraum hat eine Basis.

4.13 Satz (Austauschlemma)

Sind V ein Vektorraum, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine endliche Basis von V und $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ mit $\lambda_k \neq 0$, $1 \leq k \leq n$, dann ist $\mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_{k-1}, v, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ auch eine Basis von V.

4.14 Satz (Austauschsatz)

Seien V ein Vektorraum, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine endliche Basis und $(w_1, \ldots, w_r)$ linear unabhängig. Dann gilt:

(1) $r \leq n$

(2) Man kann r Vektoren aus $\mathcal{B}$ durch $w_1, \ldots, w_r$ austauschen, sodass man wieder eine Basis erhält.

4.15 Bemerkung (Austauschlemma und Austauschsatz)

Wenn man eine Basis eines Vektorraums und einen Vektor gegeben hat, so kann man einen Vektor aus der Basis mit diesem einzelnen Vektor austauschen, solange die Vektoren linear unabhängig sind.

4.16 Satz (Basisergänzungssatz)

Seien V ein endlich erzeugter Vektorraum und $v_1, \ldots, v_r \in V$ linear unabhängig. Dann gibt es Vektoren $v_{r+1}, \ldots, v_n$, sodass $(v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis von V ist.

4.17 Satz (Wohldefiniertheit der Dimension)

Ist V ein endlich erzeugter Vektorraum und sind $(v_1, \ldots, v_n)$ sowie $(w_1, \ldots, w_m)$ zwei Basen von V, so gilt $m = n$, das heißt, die Dimension ist wohldefiniert.

4.18 Satz (Eigenschaften von Untervektorräumen)

Seien V ein Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann gilt:

(1) V endlich erzeugt $\implies$ U endlich erzeugt

(2) $\dim(V) \geq \dim(U)$

(3) $\dim(V) = \dim(U) \iff V = U$

4.19 Satz (Prinzip der linearen Fortsetzung)

Seien V und W Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V.
Dann gibt es zu jedem n-Tupel $(w_1, \ldots, w_n)$ von Vektoren aus W genau eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ mit $\varphi(v_i) = w_i \ \forall i = 1, \ldots, n$.

Ferner gilt für φ:

(1) $\varphi(V) = \operatorname{Span}(w_1, \ldots, w_n)$

(2) φ injektiv $\iff$ $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig

V Lineare Abbildungen

5.1 Definition (Lineare Abbildung)

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung $F\colon V \to W$ heißt **lineare Abbildung**, falls gilt:

(1) $f(v+w) = f(v) + f(w)\ \forall v,w \in V$

(2) $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)\ \forall v \in V$

Kürzer heißt das gerade: $f(\lambda \cdot v + w) = \lambda \cdot f(v) + f(w)\ \forall \lambda \in K,\ \forall v,w \in V$

5.2 Definition (Kern einer linearen Abbildung)

Seien V und W zwei Vektorräume und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen diesen Vektorräumen.
Dann nennt man die Menge

$$\ker(f) := \Big\{ v \in V \;\Big|\; f(v) = 0 \Big\}$$

den **Kern** der linearen Abbildung.

5.3 Definition (Kern einer Matrix)

Sei A eine Matrix. Dann bezeichnet die Menge

$$\ker(A) := \Big\{ v \in V \;\Big|\; A \cdot v = 0 \Big\}$$

den **Kern** der Matrix.

5.4 Definition (Bild einer linearen Abbildung)

Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen V und W. Das **Bild** der linearen Abbildung ist die Menge der Vektoren aus W, die f tatsächlich annimmt. Wir schreiben

$$\operatorname{im}(f) := \Big\{ w \in W \;\Big|\; f(v) = w \Big\}$$

5.5 Definition (Bild einer Matrix)

Das Bild einer Matrix A ist gleich dem Raum, der von den Spaltenvektoren aufgespannt wird. WIr schreiben $\operatorname{im}(A)$.

5.6 Definition (Darstellungsmatrix)

Sei $f\colon V \to W$ eine K-lineare Abbildung zwischen zwei endlich-dimensionalen Vektorräumen V und W. Weiterhin seien $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W. Für $j = 1,2,\ldots,n$ ist dann $f(v_j)$ ein Element aus W, besitzt also eine eindeutige Darstellung als Linearkombination der Basis $\mathcal{B}$. Wir schreiben die Koeffizienten dieser Linearkombination in die j-te Spalte einer Matrix $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Mit anderen Worten: $A = (a_{ij})$ sit bestimmt durch

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i \quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

Die hierdurch definierte Matrix bezeichnen wir als **Darstellungsmatrix** und schreiben $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$.

5.7 Definition (Transformationsmatrix)

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Basen von V.
Dann heißt $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)$ die **Transformationsmatrix** des Basiswechsels von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

5.8 Satz (Injektivität)

Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen den K-Vektorräumen V und W. Dann gilt:

$$f \text{ injektiv} \iff \ker(f) = \{0\}$$

5.9 Satz (Bild und Kern einer linearen Abbildung als Untervektorräume)

Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen V und W. Dann ist $\mathrm{im}(f)$ ein Untervektorraum von W und $\ker(f)$ ein Untervektorraum von V.

5.10 Satz (Basistransformationsmatrizen mit zwei Basen)

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ zwei Basen von V. Dann gilt für die Transformationsmatrizen

$$\left(T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

5.11 Satz (Basistransformationsmatrizen mit drei Basen)

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{B}''$ Basen von V. Dann gilt:

$$\left(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} \cdot T_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}}$$

5.12 Satz (Basiswechselsatz)

Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-diemnsionalen K-Vektorräumen. Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ Basen von V und $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ Basen von W. Dann gilt:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(f) = T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) \cdot T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}'}$$

5.13 Satz (Dimensionsstz, Kern-Bild-Satz)

Seien V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

$$\dim(V) = \dim\big(\ker(f)\big) + \dim\big(\mathrm{im}(f)\big)$$

5.14 Satz (Surjektivität)

Sei $f\colon V \to W$ eine injektive lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorräumen V und W mit $\dim(W) = \dim(V)$.
Dann ist f auch surjektiv, das heißt $\operatorname{im}(f) = W$.

5.15 Satz (Dimensionsformel)

Seien V_1,V_2 zwei Unterräume eines endlich-dimensionalen Vektorraums V. Dann gilt:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap v_2)$$

VI Euklidische Vektorräume

6.1 Definition (Standardskalarprodukt, euklidischer Vektorraum)

Sei $V = \mathbb{R}^n$ der Standardvektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$ über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Das **Standardskalarprodukt** auf V ist die Abbildung

$$V \times V \to \mathbb{R}\ ,\ (x,y) \longmapsto \langle x,y \rangle := x^T \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

Das Paar $(V, \langle .,. \rangle)$ heißt **euklidischer Vektorraum**.

6.2 Definition (Länge eines Vektors)

Sei $x \in V$ ein Vektor aus unserem Standardvektorraum. Die **Länge des Vektors** definieren wir als

$$\|x\| := \sqrt{\langle x,x \rangle}$$

6.3 Definition (Winkel zwischen Vektoren)

Seien $x,y \in V$, $x,y \neq 0$ zwei Vektoren aus V. Dann ist der **Winkel** α, den die beiden Vektoren einschließen, gegeben durch

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle x,y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Bemerkung: Anstatt $f(v,w)$ wird oft auch $\langle v,w \rangle$ geschrieben.

6.4 Definition (Bilinearform)

Sei V ein Vektorraum über einem beliebigen Körper K. Eine **Bilinearform** auf V ist eine Abbildung $f\colon\ V \times V \to K$, die folgende Axiome erfüllt:

$$\begin{aligned} f(u+v,w) &= f(u,w) + f(v,w) \\ f(\lambda \cdot v,w) &= \lambda \cdot f(v,w) \\ f(u,v+w) &= f(u,v) + f(u,w) \\ f(v,\lambda \cdot w) &= \lambda \cdot f(v,w) \end{aligned}$$

für alle $u,v,w \in V$ und $\lambda \in K$.

6.5 Definition (Symmetrische Bilinearform)

Eine Bilinearform heißt **symmetrisch**, wenn zusätzlich zu den Axiomen aus 6.4 gilt:

$$f(v,w) = f(w,v) \quad \forall\ v,x \in V$$

6.6 Definition (Darstellende Matrix)

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $f\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Die **Darstellungsmatrix** oder auch **darstellende Matrix** ist die Matrix

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$$

mit Einträgen $a_{ij} := f(v_i,v_j)$.

Bemerkung: Es gilt bzgl. der Darstellungsmatrix folgender Zusammenhang: $f(x,y) = x^T \cdot A \cdot y$

6.7 Definition (Orthonormalbasis)

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum der Dimension n und f eine Bilinearform auf V. Eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ heißt **orthogonal** bezüglich f, wenn

$$\langle v_i,v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$$

Die Basis $\mathcal{B}$ ist eine **Orthonormalbasis**, wenn

$$\langle v_i,v_j \rangle = \delta - ij$$

wobei $\delta_{i,j}$ das Kronecker-Delta bezeichnet, welches 1 ist, wenn $i = j$ und 0 ist, wenn $i \neq j$.

6.8 Definition (Positiv definit)

Eine symmetrische Bilinearform $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Vektorraum V heißt **positiv definit**, wenn für jeden nicht verschwindenden Vektor $v \in V$ gilt:

$$f(v,v) > 0$$

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ heißt **positiv definit**, wenn die zugehörige Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$ positiv definit ist, das heißt, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$ gilt:

$$x^T \cdot A \cdot x > 0$$

6.9 Satz (Koordinatenvektoren)

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum der Dimension n, $f\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Seien $v,w \in V$ beliebige Vektoren und $x,y \in K^n$ die zugehörigen Koordinatenvektoren bezüglich der Basis $\mathcal{B}$, das heißt, es gilt $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i v_i$ und

$w = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i v_i$.
Dann gilt:

$$f(v,w) = x^T A y$$

wobei $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ bezeichnet.

6.10 Satz (Darstellungsmatrix)

Seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum der Dimension n, f eine Bilinearform auf V und $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Sei $A := \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(f)$ die darstellende Matrix.
Dann gelten folgende Aussagen:

(i) $\exists$ orthogonale Basis von V bzgl. $f \iff \exists$ invertierbare Matrix $Q \in \mathrm{Gl}_n(K)$, sodass $Q^T A Q$ ist Diagonalmatrix

(ii) $\exists$ Orthonormalbasis von V bzgl. $f \iff \exists$ invertierbare Matrix $Q \in \mathrm{Gl}_n(K)$, sodass $Q^T A Q = E_n$.
Äquivalent: $\exists\ P \in \mathrm{Gl}_n(K)$ mit $A = P^T P$.

Für $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Standardvektorraum $V = \mathbb{R}^n$ besitzt bezüglich des durch A definierten Skalarprodukts $\langle .,. \rangle_A$ eine Orthonormalbasis.

(ii) $\exists\ P \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ mit $A = P^T P$

(iii) Die Matrix A ist symmetrisch und positiv definit.

6.11 Satz (Hauptminorenkriterium)

Eine reelle symmetrische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ ist positiv definit $\iff$ alle Hauptminoren von A sind positiv, das heißt:

$$\det(A_i) > 0$$

für $i = 1, \ldots, n$, wobei die Hauptminoren gegeben sind durch

$$A_1 = (a_{11})\ ,\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\ ,\ A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\ ,\ \ldots\ ,\ A_n = A$$

6.12 Satz (Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt)

Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und sei $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine beliebige Basis von V.
Wir werden induktiv Vektoren $w_1, \ldots, w_n$ definieren, sodass für $k = 1, \ldots, n$ die Vektoren $w_1, \ldots, w_k$ eine Orthonormalbasis des Untervektorraums $V_k := \langle v_1, \ldots, v_k \rangle \subset V$ bilden. Für $k = n$ erhalten wir dann die Behauptung. Für den Induktionsanfang setzen wir

$$w_1 := \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1$$

Offenbar ist (w_1) eine Orthonormalbasis von V_1, denn so wurde dies ja gerade konstruiert. Wir nehmen nun an, dass $k > 1$ und dass wir bereits eine Orthonormalbasis $(w_1, \ldots, w_{k-1})$ von V_{k-1}

gefunden haben. Wir müssen also nur noch einen passenden Vektor w finden, der $(w_1, \ldots, w_{k-1})$ zu einer Orthonormalbasis von V_k ergänzt. Unser erster Ansatz soll lauten:

$$w = v_k - a_1 w_1 - \ldots - a_{k-1} w_{k-1} \quad (*)$$

Hierbei sind die a_i noch zu bestimmende Skalare. Durch diesen Ansatz wird auf jeden Fall gewährleistet, dass $(w_1, \ldots, w_k)$ einen Basis von V_k ist. Durch passende Wahl der a_i möchten wir erreichen, dass zusätzlich w zu w_i orthogonal ist und zwar für $i = 1,2, \ldots, k-1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\langle w_i, w_j \rangle = 0$ für $i \neq j$ und $\langle w_i, w_i \rangle = 1$. Nach Einsetzen von $(*)$ erhalten wir

$$\langle w, w_i \rangle = 0 \quad \text{für } i = 1, \ldots, k-1$$

Der Vektor w muss noch normiert werden und wir setzen

$$w_k := \frac{1}{\|w\|} \cdot w$$

Nun ist $(w_1, \ldots, w_k)$ eine Orthonormalbasis von V_k.

6.13 Drehwinkel und Drehachse

(Frühjahr 2004, Thema 3, Aufgabe 5)

Sei $\varrho \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y+1 \\ x \\ 1-z \end{pmatrix}$ eine Abbildung.

Zerlege ϱ in eine Drehung δ und eine Translation τ, sodass $\varrho = \tau \circ \delta$.

$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\varrho \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+1 \\ x \\ 1-z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \tau \left(\delta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right)$$

Hierbei ist δ eine lineare Abbildung

$$\delta \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ , \ \delta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ , \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und τ die Translation

$$\tau \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ , \ \tau \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ $(e_1, e_2, -e_3) \implies A$ orthogonal und $\det(A) = 1 \implies \delta$ ist Drehung im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$.

Drehachse a besteht aus allen Fixpunkten von δ und stimmt daher mit $\mathrm{Eig}(A,1)$ überein. Wegen

$$A - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[III:(-2)]{II+I} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \longleftrightarrow III} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist also die Drehachse

$$a = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Kosinus des Drehwinkels α ist

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathrm{Spur}(A) - 1}{2} = \frac{(0 + 0 + (-1)) - 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

6.14 Definition (Drehmatrix)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
A heißt **Drehmatrix** oder **Rotationsmatrix**, die eine Drehung im euklidischen Raum beschreibt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) A orthogonal, das heißt, $A \cdot A^T = E_n$

(ii) $\det(A) = 1$

Sei R eine Drehmatrix.
Im $\mathbb{R}^2$ gilt für die Drehung um den Winkel α

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Im $\mathbb{R}^3$ gilt für die Drehung um jeweils den Winkel α

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.15 Definition (Drehwinkel)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine Drehmatrix.
Dann gilt für den Kosinus des Drehwinkels α:

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathrm{Spur}(A) - 1}{2}$$

6.16 Definition (Spiegelungsmatrix)

Sei $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
A heißt **Spiegelungsmatrix**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) A orthogonal, das heißt, $A \cdot A^T = E_n$

(ii) A symmetrisch, das heißt, $A = A^T$

6.17 Spiegelung

(Frühjahr 2008, Thema 2, Aufgabe 3, Teilaufgabe b)

Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}3$ und sei $\langle .,. \rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie eine Matrix $S_2 \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, sodass die lineare Abbildung

$$s_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ , \ s_2(x) = S_2 \cdot x$$

eine Spiegelung an der Ebene $E_2 \colon x_1 = x_3$ ist.

$x_1 = x_3 \implies (*)\ x_1 - x_3 = 0 \implies$ Normalenvektor auf E_2: $\tilde{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Somit erhalten wir eine Lotgerade

$$l = x + \mathbb{R} \cdot \tilde{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Für den Lotfußpunkt

$$x_0 = x + \lambda \tilde{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda \\ x_2 \\ x_3 - \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

gilt dann nach $(*)$

$$(x_1 - \lambda) - (x_3 - \lambda) = 0 \implies \lambda = \frac{x_3 - x_1}{2}$$

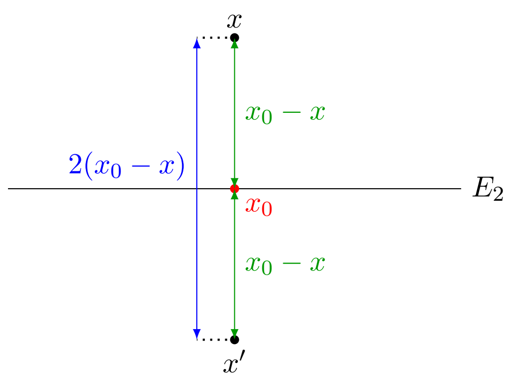
und somit

$$x_0 = \begin{pmatrix} \frac{x_1+x_3}{2} \\ x_2 \\ \frac{x_1+x_3}{2} \end{pmatrix}$$

Für den Spiegelpunkt $s_2(x)$ von x an der Ebene E_2 ergibt sich

$$(**)\ s_2(x) = x + 2(x_0 - x) = 2x_0 - x = \ldots = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:S_2} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Skizze zu $(**)$:



VII Affine Mengen und Abbildungen

Ein Punkt P ist ausschließlich durch seine Lage im Koordinatensystem festgelegt. Für einen Vektor v ist die Lage bedeutungslos. Er ist stattdessen durch Länge, Richtung und Orientierung festgelegt.

7.1 Definition (Affiner Raum)

Sei K ein Körper. Ein (K-)**affiner Raum** $\mathbb{A}$ besteht aus drei Dingen:

(1) Menge $\mathbb{P} \neq \emptyset$, deren Elemente **Punkte** heißen

(2) K-Vektorraum (genannt **Richtungsvektorraum**)

(3) Abbildung (**Verschiebungsabbildung**), die jeweils einem Punkt und einem Vektor einen Punkt zuordnet

$$\mathbb{P} \times V \to \mathbb{P}$$

Das Bild von $\mathbb{P}$ und v bezeichnen wir mit $P + v$ und nennen es den um v verschobenen Punkt P.

Ferner gelten folgende Axiome:

(I) Für jeden Punkt P gilt: $P + \text{Nullvektor} = P$

(II) Für jeden Punkt P und beliebige Vektoren v,w gilt: $(P + v) + w = P + (v + w)$

(III) Zu beliebigen Punkten P,Q gibt es genau einen Vektor v mit $P + v = Q$. Diesen Vektor bezeichnen wir mit $\overrightarrow{PQ}$.

Die Dimension von $\mathbb{A}$ ist definitionsgemäß $\dim_K(V)$.

7.2 Definition (Affine Abbildung)

Seien $\mathbb{A}$,$\mathbb{B}$ K-affine Räume mit den Punktmengen $\mathbb{P}$,$\mathbb{S}$ und den Richtungsvektorräumen V bzw. W. Eine **affine Abbildung** f von $\mathbb{A}$ nach $\mathbb{B}$ ordnet

- jedem Punkt $P \in \mathbb{P}$ einen Punkt $f(P) \in \mathbb{S}$ zu (Abbildung $\mathbb{P} \xrightarrow{f} \mathbb{S}$ heißt **Punktabbildung**)
- jedem Vektor $v \in V$ einen Vektor $f(v) \in W$ zu (Abbildung $V \xrightarrow{f} W$ heißt **Richtungsabbildung**)

und es gelten:

- $V \to W$, $v \longmapsto f(v)$ (Richtungsabbildung) ist K-linear
- $\forall P \in \mathbb{P}$ und $\forall v \in V$ gilt: $f(P+v) = f(P) + f(v)$

Bemerkung: Es werden hier also zwei *verschiedene* Abbildungen f mit demselben Buchstaben bezeichnet.

7.3 Bemerkung (Affine Abbildung)

Eine lineare Abbildung $l\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und eine Translation um einen Vektor $t \in \mathbb{R}^m$ liefern zusammen eine affine Abbildung f von dem affinen Raum $\mathbb{R}^n$ nach dem affinen Raum $\mathbb{R}^n$:

- Jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ ordnen wir den Punkt $f(P) := l(P) + t$ zu.
- Jedem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ ordnen wir den Vektor $f(v) := l(v)$ zu.

f ist affin, denn:

- Richtungsabbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau l und l ist linear.
- $\forall P \in \mathbb{R}^n$ und $\forall v \in \mathbb{R}^n$ gilt
$$\underbrace{f(P+v)}_{=l(P+v)+t} = \underbrace{f(P)}_{=l(P)+t} + \underbrace{f(v)}_{=l(v)}$$
Weil l linear ist, gilt: $l(P+v) = l(P) + l(v)$.

7.4 Bemerkung (Affine Abbildung)

Jede affine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ setzt sich aus einer linearen Abbildung und einer Translation zusammen (siehe 7.3).

7.5 Satz (Affinität)

Eine affine Abbildung $\mathbb{A} \to \mathbb{A}$ mit bijektiver Punktabbildung $\mathbb{P} \to \mathbb{P}$ nennt man eine **Affinität** von $\mathbb{A}$.

Eine Affinität von $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $x \longmapsto Ax + t$ mit $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}^n)$ und $t \in \mathbb{R}^n$.

7.6 Satz (Affiner Unterraum)

Sei U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ und sei P ein beliebiger Punkt von $\mathbb{R}^n$. Dann kann man mit U und P folgenden affinen Raum konstruieren:

- Punktmenge $P + U := \left\{ P + u \;\middle|\; u \in U \right\}$
- Richtungsvektorraum U
- Verschiebungsabbildung $(P + u) + v := P + \underbrace{(u + v)}_{\in U}$

für $P + u \in P + U$ und $v \in U$.

Diese affinen Räume miot solchen Punktmengen $P+U$ nennt man **affine Unterräume** von $\mathbb{R}^n$. Eindimensionale Unterräume nennt man **Gerade**, zweidimensionale **Ebene**. Den Richtungsvektorraum U eines affinen Unterraums $P + U$ kann man an der Punktmenge $P + U$ ablesen: Es sind einfach alle „Richtungen“, genauer alle Vektoren in $P + U$.

7.7 Bemerkung (Affiner Unterraum)

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ eines lösbaren Gleichungssystems ist von der Form

$$\text{spezielle Lösung des inhomogenen GLS} + \text{Lösungsmenge des homogenen linearen GLS}$$

wobei die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist.
Somit ist $\mathbb{L}$ genau ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Man kann umgekehrt zeigen, dass jeder affine Unterraum eine Lösungsmenge eines geegneten linearen Gleichungssystems ist.

Somit gilt: Abgesehen von der leeren Menge sind die affinen Unteräume von $\mathbb{R}^n$ genau die Lösungsmengen der linearen Gleichungssysteme.

7.8 Bemerkung (Bilder und Urbilder)

Unter einer affinen Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gelten:

- Bilder affiner Unterräume von $\mathbb{R}^n$ sind wieder affin
- Urbilder von $\mathbb{R}^m$ sind leer oder affin

7.9 Bemerkung (Berechnung des Bildes eines affinen Unterraums)

Seien $P + U$ ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$ und $f(x) = Ax + t$ eine affine Abbildung.
Wenn $u_1, \ldots, u_r$ ein Erzuegendensystem von U ist, so ist

$$f(P + U) = f(P) + \operatorname{Span}(Au_1, \ldots, Au_r) = f(P) + \langle Au_1, \ldots, Au_r \rangle$$

7.10 Definition (Parallele affine Unterräume)

Affine Unterräume $P_1 + U_1$ und $P_2 + U_2$ von $\mathbb{R}^n$ heißen **parallel**, in Zeichen $P_1 + U_1 \parallel P_2 + U_2$, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

Bemerkung: Jeder Punkt ist ein 0-dimensionaler affiner Unterraum und als solcher zu allen affinen Unterräumen parallel, da der Richtungsvektorraum der Nullvektorraum ist.

7.11 Bemerkung (Erhaltung der Parallelität)

Affine Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ erhalten Parallelität.

Bemerkung: Affine Abbildungen erhalten Winkel in der Regel NICHT.

7.12 Bemerkung (Durchschnitt affiner Unterräume)

Der Durchschnitt affiner Unterräume von $\mathbb{R}^n$ ist leer oder ein affiner Unterraum.

7.13 Definition (Verbindungsraum, Verbindungsgerade)

Seien X und Y affine Unterräume von $\mathbb{R}^n$. Dann ist der Durchschnitt aller X und Y enthaltenden affinen Unterräume automatisch der kleinste affine Unterraum, der X und Y enthält. Er heißt **Verbindungsraum** von X und Y und wird mit $X \ \vee\ Y$ bezeichnet.
Der Verbindungsraum zweier Punkt $\{P\} \neq \{Q\}$ in $\mathbb{R}^n$ ist die eindeutige P und Q enthaltende **Verbindungsgerade**

$$P \ \vee\ V := \{P\} \ \vee\ \{V\} = P + \left\langle \overrightarrow{PQ} \right\rangle = Q + \left\langle \overrightarrow{QP} \right\rangle = P + \mathrm{Span}\left(\overrightarrow{PQ}\right) = Q + \mathrm{Span}\left(\overrightarrow{QP}\right)$$

7.14 Bemerkung (Verbindungsgeraden)

Seien X und Y, $X \neq Y$ affine Unterräume von $\mathbb{R}^n$. Im Falle $X \cap Y \neq \emptyset$ ist $X \vee Y$ die Vereinigung aller Verbindungsgeraden von Punkten $P \in X$ mit von P verschiedenen Punkten $Q \in Y$.

7.15 Satz (Dimensionsformel für affine Unterräume)

Seien $X,Y \subseteq \mathbb{R}^n$ affine Unterräume.

(1) Falls $X \cap Y \neq \emptyset$:
$$\dim(X \ \vee\ Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y)$$

(2) Falls $X \cap Y = \emptyset$:
$$\dim(X \ \vee\ Y) = \dim X + \dim Y - \dim(V_X \cap V_Y) + 1$$
wobei V_X und V_Y die Richtungsvektorräume von X bzw. Y sind.

7.16 Definition (Abstand zweier Punkte)

Der **Abstand zweier Punkte** P und Q des affinen Raums $\mathbb{R}^n$ ist definitionsgemäß die Länge von $\overrightarrow{PQ}$ und wird mit $d(P,Q)$ bezeichnet.

7.17 Definition (Orthogognale affine Unterräume)

Affine Unterräume $X = P + U$ und $Y = S + V$ von $\mathbb{R}^n$ heißen **orthogonal**, in Zeichen $X \perp Y$, wenn $U \perp V$ gilt.

7.18 Satz (Pythagoras)

Für paarweise verschiedene Punkte $P,Q,R \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$(P \vee Q) \perp (Q \vee R) \iff d(P,R)^2 = d(P,Q)^2 + d(Q,R)^2$$

7.19 Bemerkung (Windschiefe Geraden)

Zwei windschiefe Geraden besitzen ein eindeutiges „gemeinsames Lot“.

7.20 Definition (Gemeinsames Lot)

Seien $X = P + U$ und $Y = S + V$ affine Unterräume von $\mathbb{R}^n$ mit $X \cap Y = \emptyset$. Für $a \in X$ und $b \in Y$ heißt $a \vee b$ **gemeinsames Lot** von X und Y, wenn $a \vee b$ zu X und zu Y orthogonal ist.

Bemerkung: Das gemeinsame Lot muss NICHT eindeutig sein (denke z. B. an zwei parallele Geraden).

7.21 Satz (Gemeinsames Lot)

Seien $X = P + U$ und $Y = S + V$ affine Unterräume von $\mathbb{R}^n$ mit $X \cap Y = \emptyset$.

(1) X und Y haben ein gemeinsames Lot.

(2) Seien $a \in X$ und $b \in Y$.

$$a \vee b \text{ gemeinsames Lot von } X \text{ und } Y \iff d(a,b) \text{ ist minimal}$$

$d(a,b)$ minimal heißt: $\forall c \in X\ \forall d \in Y:\ d(a,b) \leq d(c,d)$

(3) Sind für $a,c \in X$ und $b,d \in Y$ $a \vee b$ und $c \vee d$ gemeinsame Lote von X und Y, so ist $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd}$.

(4) Im Falle $U \cap Y = \{0\}$ sind die Punkte $a \in X$ und $b \in Y$, für die $a \vee b$ gemeinsames Lot von X und Y ist, eindeutig.

7.22 Definition (Abstand zweier affiner Unterräume)

Der **Abstand** $d(X,Y)$ **zweier affiner Unterräume** $X,Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ist der Abstand der beiden Fußpunkte a,b eines gemeinsamen Lotes $a \vee b$ von X und Y im Falle $X \cap Y = \emptyset$; andernfalls ist er Null.

7.23 Definition (Hyperebene, Normalenvektoren, Normaleneinheitsvektoren)

Sei $n \geq 2$. Eine **Hyperebene** in $\mathbb{R}^n$ ist ein affiner Unterraum $H = P + U$ von $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n - 1$. Die Vektoren aus $U^\perp \setminus \{0\}$ heißen **Normalenvektoren** von H. Normalenvektoren der Länge Eins heißen **Normaleneinheitsvektoren.**

7.24 Definition (Hessesche Normalform)

Wegen $\dim(U^{\perp}) = n - \dim U = 1$ gibt es genau zwei Normaleneinheitsvektoren. Eine Hyperebene H kann stets durch eine Gleichung

$$a_1X_1 + \ldots + a_nX_n = b$$

beschrieben werden. Diese kann man auch schreiben als

$$\langle a,X\rangle - b = 0$$

wobei $a := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ und $X := \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ der Unbestimmtenvektor ist.

U ist Lösungsmenge von $\langle a,X\rangle = 0$, also ist a ein Normalenvektor von H.
Dividiert man durch $\pm \|a\|$, kann man $\|a\| = 1$ und $b \geq 0$ erreichen. Dann heißt

$$\langle a,X\rangle - b = \mathrm{Span}(a,X) - b = 0$$

Hessesche Normalform von H.
Bemerkung: $\langle .,. \rangle$ bezeichne das Standardskalarprodukt.

7.25 Bemerkung (Hessesche Normalenform)

Sei $\langle a,X\rangle - b = 0$ die Hessesche Normalform einer Hyperebene H in $\mathbb{R}^n$.

$$\forall P \in \mathbb{R}^n: \; d(P,H) = |\langle a,P\rangle - b|$$

7.26 Definition (Winkel zwischen zwei Geraden)

Der **Winkel** zwischen zwei (sich schneidenden) Geraden g,h in $\mathbb{R}^n$ mit Richtungsvektoren u bzw. v soll der kleinere der beiden Winkel $\angle(u,v)$ und $\angle(u,-v)$ sein und ist definiert durch

$$\cos(\angle(g,h)) = \left| \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \right|$$

7.27 Definition (Bewegung bzw. Isometrie)

Eine **Bewegung** bzw. **Isometrie** von $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $b\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, welche die Abstände erhält:

$$\forall P,Q \in \mathbb{R}^n: \; f(b(P),b(Q)) = d(P,Q)$$

Es ist klar, dass jede Translation $\tau_v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \longmapsto x + v$ um einen Translationsvektor $v \in \mathbb{R}^n$ eine Bewegung von $\mathbb{R}^n$ ist. Allgemeiner ist jede Abbildung der Form $b(x) = Ax + t$ mit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ und $t \in \mathbb{R}^n$ eine Bewegung.

7.28 Definition ((Un)eigentliche Affinität)

Jede Bewegung ist von der Form wie in 7.27. Eine Bewegung ist also eine spezielle Affinität $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \longmapsto Ax + t$ von $\mathbb{R}^n$, nämlich mit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Sie heißt **(un)eigentlich**, wenn A

(un)eigentlich ist. Das heißt A ist orthogonal und es gilt: $\det(A) = \pm 1$

7.29 Definition (Fixpunkt)

Sei P ein Punkt und B eine Bewegung. Der Punkt P heißt **Fixpunkt**, wenn $b(P) = P$ gilt.

7.30 Definition (Gleitspiegelung)

Eine **Gleitspiegelung** ist eine Zusammensetzung $\tau_v \circ \sigma_g$, wobei σ_g die Spiegelung an der Geraden $g = P + U$ und τ_v die Translation um einen Vektor $V \in U \setminus \{0\}$ ist.

7.31 Bemerkung (Bewegungen)

Bewegungen sind von der Form $x \longmapsto Ax + t$. Wegen $A \in \mathcal{O}_n(K)$ setzen sich Bewegungen also letztlich aus Drehungen, Spiegelungen und Translationen zusammen (zumindest für $n = 2$ und $n = 3$).
Für $\mathbb{R}^2$ kann man zeigen, dass es außer $\mathrm{id}(\mathbb{R}^2)$ genau vier Typen von Bewegungen gibt:

- Translationen: sind eigentlich und haben KEINEN Fixpunkt
- Drehungen um Punkte: sind eigentlich und haben genau einen Fixpunkt (Drehpunkt)
- Spiegelungen an Geraden: sind uneigentlich und haben als Fixpunkt-Mengen genau die Spiegelungsgerade
- Gleitspiegelungen: sind uneigentlich und haben KEINE Fixpunkte

7.32 Definition (Kongruente Teilmengen)

Teilmengen $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ heißen **kongruent**, wenn es eine Bewegung b von $\mathbb{R}^n$ mit $b(M) = N$ gibt.
Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation, das heißt reflexiv, symmetrisch und transitiv.

7.33 Satz (Kongruenzsatz)

Seien $M = \{P_0, \ldots, P_n\}$ und $N = \{Q_0, \ldots, Q_n\}$ zwei $n+1$-elementige, affinunabhängige Teilmengen (*siehe 7.34*) von $\mathbb{R}^m$ mit $n \geq 2$. Dann sind äquivalent:

- M und N sind kongruent
- Bis auf Permutation der Punkte $P_0, \ldots, P_n$ gilt: $\forall i,j\colon\ d(Q_i,Q_j) = d(P_i,P_j)$
- Bis auf Permutation der Punkte $P_0, \ldots, P_n$ gelten:
  $\forall 1 \leq i < j \leq n\colon\ \angle(Q_0; Q_i, Q_j) = \angle(P_0; P_i, P_j)$ und $\forall i\colon\ d(Q_0,Q_i) = d(P_0,P_i)$

7.34 Definition (affin-unabhängig)

Eine $n+1$-elementige Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ heißt **affin-unabhängig**, wenn sie NICHT in einem $n-1$-dimensionalen affinen Unterraum liegt.

Im Spezialfall $n = 2$ gilt

$$\begin{aligned} \{P_0,P_1,P_2\} \text{ affin-unabhängig } &\iff \{P_0,P_1,P_2\} \text{ NICHT enthalten in einer Gerade} \\ &\iff \{P_0,P_1,P_2\} \text{ Dreieck} \end{aligned}$$

7.35 Korollar (Kongruenz von Dreiecken)

Zwei Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn sie

- in ihren Seitenlängen übereinstimmen („SSS“)
- in den Längen zweier Seiten und dem von diesen zwei Seiten eingeschlossenen Winkel übereinstimmen („SWS“)

7.36 Umrechnung von Ebenenformen

Seien $\vec{n},\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, E eine Ebene, $P \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt mit Ortsvektor $\vec{p}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Der Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ sei der Ortsvektor zum Punkt $A \in E$.

7.36.1 Parameterform – Normalenform – Koordinatendarstellung

$$
\begin{aligned}
&E\colon\ \vec{x} = \vec{a} + \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v} \qquad \text{(Parameterform)}\\
&\vec{u} \times \vec{v} = \vec{n} \qquad \text{(Normalenvektor)}\\
&\Longrightarrow\ E\colon\ \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \qquad \text{(Normalenform)}\\
&\Longrightarrow\ \vec{n} \circ \vec{x} = \vec{n} \circ \vec{a}\\
&\Longrightarrow\ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\\
&\Longrightarrow\ n_1x + n_2y + n_3z = n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3 \qquad \text{(Koordinatendarstellung)}
\end{aligned}
$$

Normiert man $\vec{n}$ in der Normalenform mit

$$\vec{n}_0 := \frac{1}{\|\vec{n}\|} \cdot \vec{n}$$

so heißt

$$E\colon\ \vec{n}_0 \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

die **Hesse-Form** von E.

Für den Abstand des Punktes P von der Ebene E gilt:

$$d(P,E) = \vec{n}_0 \circ (\vec{p} - \vec{a})$$

Ferner gilt:

$$
\begin{aligned}
d > 0\colon &\quad \text{Ursprung und } P \text{ liegen auf verschiedenen Seiten von } E\\
d = 0\colon &\quad P \in E\\
d < 0\colon &\quad \text{Urpsung und } P \text{ liegen auf derselben Seite von } E
\end{aligned}
$$

7.36.2 Koordinatendarstellung – Normalenform – Parameterform

$$n_1x + n_2y + n_3z = \vec{a} \qquad \text{(Koordinatendarstellung)}$$
$$\implies \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$
$$\implies E\colon\ \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \qquad \text{(Normalenform)}$$

Suche nun einen Vektor $\vec{u}$ (durch Ausprobieren), für den gilt:

$$\vec{n} \circ \vec{u} = 0$$

Rechne anschließend

$$\vec{n} \times \vec{u} =: \vec{v}$$

Mit $\vec{a} \in E$ folgt

$$E\colon\ \vec{x} = \vec{a} + \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v} \qquad \text{(Parameterform)}$$

7.37 Schnitt zweier Ebenen

Seien E,F Ebenen in $\mathbb{R}^3$, $\vec{a}$ der Ortsvektor der Punktes $A \in E$ und $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Ferner seien $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1, n_2, n_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$.

7.37.1 Parameterform und Koordinatenform

$$E\colon\ \vec{x} = \vec{a} + \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v} \qquad ; \qquad F\colon\ n_1x + n_2y + n_3z = \vec{n} \circ \vec{a}$$

Aus E lassen sich drei Gleichungen ablesen:

$$x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1$$
$$y = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2$$
$$z = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3$$

mit $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.
Diese drei Gleichungen werden in F eingesetzt:

$$n_1(a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1) + n_2(a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2) + n_3(a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3) = \vec{n} \circ \vec{a}$$
$$\implies \lambda = \ldots + \ldots \cdot \mu$$

Setze λ in E ein und erhalte die Schnittgerade

$$\vec{x} = \vec{a}' + \mu \vec{v}'$$

wobei $\vec{a}',\vec{v}' \in \mathbb{R}^3$. Der Richtungsvektor $\vec{v}'$ kann noch so modifiziert werden, dass er nur ganzzahlige Einträge enthält.

7.37.2 Parameterform und Parameterform

Wandle eine Ebene in Koordinatenform um und nutze obiges Verfahren.

7.38 Schnitt von Gerade und Ebene

Seien g eine Gerade, E eine Ebene, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $\vec{t},\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Ferner seien $\vec{a}$ und $\vec{p}$ Ortsvektoren zu den Punkten $A \in E$ bzw. $P \in g$.

$$g\colon\ \vec{x} = \vec{p} + \mathbb{R}\vec{t} \qquad ; \qquad E\colon\ \vec{x} = \vec{a} + \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}$$

Setze $g = E$ und es seien $\alpha,\lambda,\mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &\vec{p} + \alpha\vec{t} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \\ \implies\ &\vec{p} - \vec{a} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} - \alpha\vec{t} \end{aligned}$$

Multipliziere nun die Einträge von $\vec{t}$ mit (-1) und erhalte $\vec{t}\,'$, das heißt, $\vec{t}\,' = \begin{pmatrix} -t_1 \\ -t_2 \\ -t_3 \end{pmatrix}$. Somit folgt

$$\vec{p} - \vec{a} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \alpha\vec{t}\,'$$

Dies kann man umschreiben zu

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{t}\,) \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & t_1 \\ u_2 & v_2 & t_2 \\ u_3 & v_3 & t_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ p_3 - a_3 \end{pmatrix} = \vec{p} - \vec{a}$$

Erhalte also

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & t_1 & | & p_1 - a_1 \\ u_2 & v_2 & t_2 & | & p_2 - a_2 \\ u_3 & v_3 & t_3 & | & p_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Durch elementare Zeilenoperationen lässt sich diese Matrix vereinfachen und man erhält einen Ausdruck

$$\alpha = \ldots$$

Setze nun α in g ein und erhalte den Schnittpunkt S (mit Ortsvektor $\vec{s}$) von Gerade g und Ebene E.

VIII Kegelschnitte und Quadriken

8.1 Definition (Kegelschnitt, Quadrik)

Wir haben drei Koordinaten X,Y,Z im euklidischen Raum. Die Lösungsmenge der Gleichung $X^2 + Y^2 = Z^2$ ist „etwas zweidimensionales“, eine „Fläche“, konkret ein sogenannter „Kreiskegel“. Schneidet man diesen mit einer Ebene $aX + bY + cZ = d$, erhält man einen sogenannten **Kegelschnitt**. Dieser ist im Prinzip durch eine quadratische Gleichung gegeben, welche man

dadurch erhält, indem man die Ebenen-Gleichung nach einer Unbestimmten auflöst und anschließend in die Kreiskegel-Gleichung einsetzt.
Im Beispiel für $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ und $d = 4$ gilt

$$X + 2Y + 3Z = 4 \iff Z = -\frac{X}{3} - \frac{2}{3}Y + \frac{4}{3}$$

Einsetzen ergibt

$$X^2 + Y^2 = \left(-\frac{X}{3} - \frac{2}{3}Y + \frac{4}{3}\right)^2$$

Der kegelschnitt ist also letztlich eine **Quadrik** (hier in der X-Y-Ebene), welche definitionsgemäß die Lösungsmenge einer Quadratischen Gleichung in $\mathbb{R}^2$ ist.

8.2 Normalformen der Kegelschnitte

- **Ellipse**: $\left(\frac{X}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{Y}{\beta}\right)^2 = 1$ mit Halbachsen $\alpha,\beta > 0$
- **Hyperbel**: $\left(\frac{X}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{Y}{\beta}\right)^2 = 1$ mit Halbachsen $\alpha,\beta > 0$
- **Parabel**: $Y^2 = 4\varrho X$ mit $\varrho > 0$

Dies sind die (metrischen) **Normalformen** der Kegelschnitte.

Jede Quadrik im $\mathbb{R}^2$ ist so. Man muss nur einen geeigneten Koordinatenwechsel durchführen. Geometrisch heißt das: Man legt die Koordinatenachsen auf die Hauptachsen.

8.3 Hauptachsentransformation

Es gibt zwei Varianten der Hauptachsentransformation, mit der man eine Quadrik in ihre Normalform überführt:

- **Affin**: Begriffe, wie Länge, Winkel sind bedeutungslos; erlaubte Koordinatenwechsel für die Hauptachsentransformation sind Affinitäten $x \longmapsto Ax + t$ von $\mathbb{R}^2$ mit $A \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$
- **Metrisch** (euklidisch): man arbeitet mit Bewegungen $x \longmapsto Ax + t$ mit $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ von $\mathbb{R}^2$

8.4 Affine Normalformen von Kegelschnitten

In diesem Abschnitt werden durchgehend gleiche Bezeichnungen für Koeffizienten verwendet. Das heißt: Wird zum Beispiel der Koeffizient a durch c geteilt, so heißt der „neue Koeffizient“ auch wieder a: „$\frac{a}{c} = a$“.

Wir bringen eine Quadrik

$$AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0$$

(NICHT alle drei Koeffizienten A,B,C Null) mit einer Affinität auf eine affine Normalform.

- Erreiche $B = 0$ und $C \neq 0$.
  Falls $C = 0$:

- Im Fall $A = 0$, das heißt $B \neq 0$, machen wir

$$XY = \Bigg(\underbrace{\frac{X}{2} + \frac{Y}{2}}_{=X'}\Bigg)^2 - \Bigg(\underbrace{\frac{X}{2} - \frac{Y}{2}}_{=Y'}\Bigg)^2$$

das heißt

$$X = X' + Y' \qquad \text{und} \qquad Y = X' - Y'$$

- Im Fall $A \neq 0$ vertauschen wir X und Y.

- Lasse B verschwinden mittels quadratischer Ergänzung mittels C.
- Lasse E verschwinden mittels quadratischer Ergänzung mittels C und erreiche die Form

$$AX^2 + CY^2 + DX + F = 0$$

- Falls $A = 0$:
  - Falls $D = 0$:
    * Falls $F = 0$:
      Division durch C liefert: $Y^2 = 0$
      Das ist eine („Doppel-")Gerade
    * Falls $F \neq 0$:
      Division durch $\pm F$ und Streckung $Y' = \sqrt{|C|}Y$ (neues F ist ± 1) liefern: $Y^2 = \pm 1$
      Dies sind zwei parallele Geraden: $(Y^2 = 1 \iff (Y+1)(Y-1)$ oder leere Menge $(Y^2 = -1)$
  - Falls $D \neq 0$:
    Zunächst sei ohne Einschränkung $C = 1$ (Division).
    Dann liefert $X' = -DX - F$: $Y^2 = X$
    Das ist eine Parabel in affiner Normalenform.
- Falls $A \neq 0$:
  Lasse D verschwinden mittel quadratischer Ergänzung mittels A und erreiche die Form

$$AX^2 + CY^2 + F = 0$$

  Im Wesentlichen erreichen wir mir Division durch $\pm F$ (falls $F \neq 0$) und $X' = \sqrt{|A|}X$, $Y' = \sqrt{|C|}Y$ und ggf. Vertauschen von X und Y einen der folgenden Fälle:

✓	$X^2 + Y^2 = 1$	Ellipse in affiner Normalenform
✓	$X^2 + Y^2 = 0$	Punkt
✓	$X^2 + Y^2 = -1$	leere Menge
✓	$X^2 - Y^2 = 1$	Hyperbel in affiner Normalenform
✓	$X^2 - Y^2 = 0$	zwei sich schneidende Geraden

Bemerkung: Affine Abbildungen ändern im Allgemeinen Abstände und Winkel, das heißt, ein Kreis wird im Allgemeinen zu einer Ellipse „verzerrt".

Visualisierung:

$$AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0$$

$C = 0$

$A = 0 \longleftrightarrow B \neq 0$

$$(\Delta) \quad XY = \Bigg(\underbrace{\frac{X}{2} + \frac{Y}{2}}_{=X'}\Bigg)^2 - \Bigg(\underbrace{\frac{X}{2} - \frac{Y}{2}}_{=Y'}\Bigg)^2$$

$A \neq 0$

vertausche X und Y in (Δ)

quadratische Ergänzung mittels C
$\Longrightarrow$ lasse B und E verschwinden
$\Longrightarrow \; AX^2 + CY^2 + DX + F = 0$

$A = 0$

$D = 0$

Division durch C
$\Longrightarrow \; Y^2 = 0$
$\longrightarrow$ („Doppel-“)Gerade

Division durch $\pm F$ und Streckung $Y' = \sqrt{|C|}Y$
$\Longrightarrow$ neues $F = \pm 1$ und $Y^2 = \pm 1$
$\longrightarrow$ zwei parallele Geraden oder leere Menge

$D \neq 0$

o.E. sei $C = 1$ (Division);
Verschiebung $X' = -DX - F$
liefert $Y^2 = X$
$\longrightarrow$ Parabel

$A \neq 0$

quadratische Ergänzung mittels A
$\Longrightarrow$ lasse D verschwinden
$\Longrightarrow \; AX^2 + CY^2 + F = 0$

Division durch $\pm F$ $(F \neq 0)$ und $X' = \sqrt{|A|}X$, $Y' = \sqrt{|C|}Y$ und ggf. Vertauschen von X und Y liefern:
$X^2 + Y^2 = 1$ (Ellipse)
$X^2 + Y^2 = 0$ (Punkt)
$X^2 + Y^2 = -1$ (leere Menge)
$X^2 - Y^2 = 1$ (Hyperbel)
$X^2 - Y^2 = 0$ (schneidende Geraden)

8.5 Metrische Normalformen von Kegelschnitten

In diesem Abschnitt werden durchgehend gleiche Bezeichnungen für Koeffizienten verwendet. Das heißt: Wird zum Beispiel der Koeffizient a durch c geteilt, so heißt der „neue Koeffizient“ auch wieder a: „$\frac{a}{c} = a$“.

Wir bringen eine Quadrik (Qu)

$$aX^2 + bXY + cY^2 + dX + eY + f = 0$$

(NICHT alle drei Koeffizienten a,b,c Null) mit einer Bewegung auf eine metrische (euklidische) Normalform.

Der „quadratische Anteil“ ist

$$aX^2 + bXY + cY^2 = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

- diagonalisiere symmetrische Matrix A mit orthogonaler Matrix $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$:

$$S^T AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- Koordinatenwechsel $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$ liefert:

$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \ldots = \begin{pmatrix} X' & Y' \end{pmatrix} \cdot S^T AS \cdot \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} + \ldots$$

  und vereinfacht die Quadrik zu $\lambda_1 X'^2 + \lambda_2 Y'^2 + \ldots$

- Änderung der Terme d,e,f, aber gemischter Term ist weg.

- Annahme $b = 0$ liefert

$$aX'^2 + cY'^2 + dX' + eY' + f = 0$$

  wobei $a \neq 0$ ODER $c \neq 0$.

- Ohne Einschränkung sei $c \neq 0$. Mit Verschiebung in Y'-Richtung durch quadratische Ergänzung $Y'' = Y' + \frac{e}{2c}$ erreichen wir auch noch $e = 0$, also

$$aX'^2 + cY''^2 + dX' + f = 0$$

  - Falls $a \neq 0$:
    Mit Verschiebung in X'-Richtung durch quadratische Ergänzung $X'' = X' + \frac{d}{2a}$ erreichen wir $d = 0$, also

$$aX''^2 + cY''^2 + f = 0$$

    Division durch c liefert

$$aX''^2 + Y''^2 + f = 0$$

    Wir erreichen also einen der folgenden Fälle:

a	f	Kegelschnitt
> 0	> 0	$\emptyset$
> 0	$= 0$	Punkt
> 0	< 0	Ellipse
< 0	$\neq 0$	Hyperbel
< 0	$= 0$	zwei sich in genau einem Punkt schneidende Geraden

  - Falls $a = 0$:

$$cY''^2 + dX' + f = 0$$

- Falls $d = 0$ $(*)$:

  $$cY''^2 + f = 0$$

  Division durch c liefert

  $$Y''^2 + f = 0$$

  Wir erreichen also einen der folgenden Fälle:

f	Kegelschnitt
> 0	$\emptyset$
$= 0$	(„Doppel-“)Gerade
< 0	zwei verschiedene, parallele Geraden

- Falls $d \neq 0$:

  $$cY''^2 + dX' + f = 0$$

  Sei ohne Einschränkung $f = 0$ durch Verschiebung in X'-Richtung mit $X'' = X' - \frac{f}{d}$, also

  $$cY''^2 + dX'' = 0$$

  Division durch $c \neq 0$ liefert

  $$Y''^2 + dX'' = 0$$

  Dies ist eine Parabel.

Insgesamt hat man den Koordinatenwechsel

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \end{pmatrix} + S \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

mit der Verschiebung

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

wobei $t_1 = 0$ im Fall $(*)$.

Die Quadrik (Qu) geht also aus der am Ende erhaltenen metrischen (euklidischen) Normalform durch die Bewegung

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \longmapsto S \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + S \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

hervor.

Bemerkung: Bewegungen erhalten Abstände und Winkel, das heißt hier also, dass Kreise auch Kreise bleiben.

Visualisierung:

$$aX^2 + bXY + cY^2 + dX + eY + f = 0$$

$$\downarrow$$

$$aX^2 + bXY + cY^2 = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$S^T AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \implies \lambda_1 X_1'^2 + \lambda_2 Y'^2 + \ldots$$

$\downarrow$ Annahme: $b = 0$

$$aX'^2 + cY'^2 + dX' + eY' + f = 0 \qquad (a \neq 0 \text{ ODER } c \neq 0)$$

$\downarrow$ o.E. $c = 0$

Verschiebung in Y'-Richtung durch $Y'' = Y' + \frac{e}{2c} \implies e = 0$, also $aX'^2 + cY''^2 + dX' + f = 0$

$a \neq 0$:

Verschiebung in X'-Richtung mit $X'' = X' + \frac{d}{2a} \implies d = 0$, also $aX''^2 + cY''^2 + f = 0$

$\downarrow$ $: c$

$$aX''^2 + Y''^2 + f = 0$$

$$\downarrow$$

a	f	Kegelschnitt
> 0	> 0	$\emptyset$
> 0	$= 0$	Punkt
> 0	< 0	Ellipse
< 0	$\neq 0$	Hyperbel
< 0	$= 0$	zwei sich in genau einem Punkt schneidende Geraden

$a = 0$:

$$cY''^2 + dX' + f = 0$$

$d = 0$:

$$cY''^2 + f = 0$$

$\downarrow$ $: c$

$$Y''^2 + f = 0$$

$$\downarrow$$

f	Kegelschnitt
> 0	$\emptyset$
$= 0$	(„Doppel-“)Gerade
< 0	zwei verschiedene, parallele Geraden

$d \neq 0$:

Verschiebung in X'-Richtung mit $X'' = X' - \frac{f}{d} \implies f = 0$, also $cY''^2 + dX'' = 0$

$\downarrow$

Parabel

8.6 Rechnen mit Quadriken

Sei Q eine Quadrik und seien $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$.

$$Q\colon\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

$$\implies \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}}_{=:\alpha^T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \ldots = \begin{cases} \lambda_1 = \ldots \\ \lambda_2 = \ldots \end{cases}$$

wobei $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von A darstellen.
Erhalte mit $A - \lambda_1 E$ und $A - \lambda_2 E$ die Eigenvektoren v_1 und v_2 von A zum Eigenwert λ_1 bzw. λ_2.

$$\implies S^T A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad S = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right)$$

Wähle nun die Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$$

und es folgt

$$\begin{pmatrix} w & z \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}_{=S^T A S} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \underbrace{\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right)}_{=S} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + f = 0$$

Mit quadratischer Ergänzung und weiterer geeigneter Variablentransformation erhält man die metrische Norlmalform von Q (siehe 8.5).

Um die affine Normalform einer Quadrik zu erhalten, bedient man sich lediglich der quadratischen Ergänzung in Kombination mit einer geeigneten Variablentransformation.

8.6.1 Berechnung des Mittelpunktes

$\det(A) \neq 0 \implies \exists A^{-1} \implies$ Mittelpunkt $t = -\frac{1}{2} A^{-1} \cdot \alpha$

Bemerkung: Ein Kegelschnitt ist genau dann eine Parabel, wenn er keinen Mittelpunkt besitzt, das heißt also, dass $A \cdot t = -\frac{1}{2}\alpha$ KEINE Lösung besitzt.

Alternativ kann der Mittelpunkt mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} w_1 + w_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \underbrace{S \cdot \begin{pmatrix} w_2 \\ z_2 \end{pmatrix}}_{=t}$$

berechnet werden, falls eine Weitere Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} w_1 + w_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$ durchgeführt wurde.

Bemerkung: So wird auch der Scheitel einer Parabel berechnet.

8.6.2 Verschiebung des Mittelpunkts in den Ursprung

Eine Verschiebung des Mittelpunkts in den Ursprung erfolgt durch die Variablentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + t$ und es gilt:

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c + \frac{1}{2}\alpha^T t = 0$$

Hieraus folgt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -c - \frac{1}{2}\alpha^T t$$

8.6.3 Hauptachsen einer Ellipse

Die Hauptachsen eimner Ellipse erhält man mit

$$t + \mathbb{R} \cdot v_1 \qquad \text{und} \qquad t + \mathbb{R} \cdot v_2$$

Die Längen der Hauptachsenabschnitte können aus der Normalform

$$\frac{w^2}{\gamma^2} + \frac{z^2}{\psi^2} = 1$$

abgelesen werden und entsprechen gerade γ und ψ.

IX Homomorphismen

9.1 Definition (Homomorphismus)

Ein **Homomorphismus** f ist eine strukturerhaltende Abbildung zwischen zwei algebraischen Strukturen. Das heißt, sind A und B zwei algebraische Strukturen (zum Beispiel Gruppen, Ringe, Körper oder Ähnliches), so gilt für jede Verknüpfung $\circ_A$ auf A und jede Verknüpfung $\circ_B$ auf B und für alle $a,b \in A$:

$$f(a \circ_A b) = f(a) \circ_b f(b)$$

9.2 Definition (Epimorphismus)

Ein **Epimorphismus** ist ein surjektiver Homomorphismus.

9.3 Definition (Monomorphismus)

Ein **Monomorphismus** ist ein injektiver Homomorphismus.

9.4 Definition (Isomorphismus)

Ein **Isomorphismus** ist ein bijektiver Homomorphismus. Gibt es einen Isomorphismus zwischen A und B, so heißen A und B **isomorph** und wir schreiben $A \cong B$.

9.5 Definition (Endomorphismus)

Einen Homomorphismus nennt man im Fall $A = B$ einen **Endomorphismus**. Wir bezeichnen mit $\mathrm{End}_K(V)$ den Raum aller Endomorphismen der K-Vektorraums V.

9.6 Definition (Automorphismus)

Einen Isomorphismus nennt man im Fall $A = B$ einen **Automorphismus**. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Aut}_K(V)$ den Raum aller Atomorphismen des K-Vektorraums V.

9.7 Satz (Eigenschaften von Morphismen)

Seien A und B algebraische Strukturen und $f\colon A \to B$ ein Morphismus.

(1) Jeder Homomorphismus bildet das neutrale Element von A auf das neutrale Element von B ab.

(2) Sind A und B multiplikativ invertierbar (das heißt, zu jedem $a \in A$ und $b \in B$ existiert ein multiplikatives Inverses), so gilt für das Inverse

$$f(a^{-1}) = \big(f(a)\big)^{-1}$$

(3) Jeder Körperhomomorphismus ist injektiv, also automatisch ein Monomorphismus.

9.8 Satz (Vektorraum-Isomorphismus)

Sei $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis eines K-Vektorraums V. Betrachte die Abbildung

$$p\colon V \to V \ , \ p(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$$

Dann ist p ein Vektorraum-Isomorphismus.

Weiter gilt für $v_1, \ldots, v_s \in V$

$$\begin{aligned} (v_1, \ldots, v_s) \text{ linear unabhängig } &\iff \big(p(v_1), \ldots, p(v_s)\big) \text{ linear unabhängig} \\ \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s = 0 &\overset{p \text{ inj.}}{\iff} p(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s) = p(0) \\ &\overset{p \text{ lin.}}{\iff} \lambda_1 p(v_1) + \ldots + \lambda_s p(v_s) = 0 \end{aligned}$$

Außerdem gilt für $v_1, \ldots, v_s, v \in V$:

$$\begin{aligned} v \in K v_1 + \ldots + K v_s &\iff p(v) \in K p(v_1) + \ldots + K p(v_s) \\ &\iff \exists\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in K \text{ mit } v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s \\ &\overset{p \text{ Iso}}{\iff} \exists\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in K \text{ mit } p(v) = \lambda_1 p(v_1) + \ldots + \lambda_s p(v_s) \end{aligned}$$

X Determinanten

10.1 Definition (Axiomatische EInführung der Determinante)

Eine **Determinantenfunktion** ist eine Funktion $\det\colon \mathcal{M}_{n,n}(K) \to K$, für die gilt:

(1) det ist **alternierend**, das heißt:

$$\det(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0$$

(2) det ist **multilinear**, das heißt linear in jeder Spalte. Also gilt für alle $k = 1, \ldots, n$ und $\lambda, \mu \in K$:

$$\det(v_1, \ldots, \lambda v_k + \mu w, \ldots, v_n) = \lambda \cdot \det(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_n) + \mu \cdot \det(v_1, \ldots, w, \ldots, v_n)$$

(3) det ist **normiert**, das heißt, $\det(E_n) = 1$.

10.2 Satz (Existenz und Eindeutigkeit der Determinante)

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists!$ Determinantenfunktion

10.3 Satz (Rechenregeln und Eigenschaften der Determinante)

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quadratische $(n \times n)$-Matrizen. Dann gilt:

(1) $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

(2) Verhalten unter elementaren Zeilen- oder Spaltenoperationen:

- Geht B aus A durch Vertauschen von zwei Zeilen/Spalten hervor, so gilt:

$$\det(B) = -\det(A)$$

- Geht B aus A durch Addition des λ-fachen einer Zeile/Spalte aus einer anderen hervor, so gilt:

$$\det(B) = \det(A)$$

- Geht B aus A durch multiplikation einer Zeile/Spalte mit einem Skalar $\lambda \neq 0$ hervor, so gilt:

$$\det(B) = \lambda \det(A)$$

(3) Ist A eine Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so gilt: $\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

(4) Hat A zwei linear abhängige Zeilen/Spalten, so ist $\det(A) = 0$

(5) $\det(A) \neq 0 \iff A$ ist invertierbar

(6) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

(7) $\det(A^{-1}) = \big(\det(A)\big)^{-1}$, falls A invertierbar ist.

(8) $\det(A) = \det(A^T)$

Stichwortverzeichnis

A

Abstand zweier affiner Unterräume 29
Abstand zweier Punkte 28
affine Abbildung 26
affine Unterräume 27
    orthogonale 29
affiner Raum 25
Affinität 26
Automorphismus 43

B

Basis 15
    orthogonal 20
Bewegung 30
Bild 17
Bilinearform 19
    symmetrische 20

C

charakteristisches Polynom 10

D

darstellende Matrix 20
Darstellungsmatrix 18, 20
Determinantenfunktion 44
Diagonalisierbarkeit 9
Dimension 15
Drehmatrix 23

E

Ebene 27
Eigenraum 10
Eigenvektor 9
Eigenwert 9
elementare Zeilenoperationen 7
Ellipse 35
Endomorphismus 43
Epimorphismus 42
Erzeugendensystem 14
Erzeugnis 14

F

Fixpunkt 31

G

gemeinsames Lot 29
Gerade 27
Gleitspiegelung 31

H

Hesse-Form 32
Hessesche Normalform 30
Homomorphismus 42
Hyperbel 35
Hyperebene 29

I

invertierbare Matrix 7
Isometrie 30
isomorph 42
Isomorphismus 42

K

Kegelschnitt 34
Kern 17

L

Länge des Vektors 19
linear abhängig 14
linear unabhängig 14
lineare Abbildung 17
lineare Hülle 14
lineares Gleichungssystem 7
Linearkombination 14

M

Matrix
    ähnliche 12
    adjungierte 12
    adjunkte 8
    orthogonale 12

positive definite ... 12
schiefsymmetrisch ... 12
selbstadjungiert ... 12
symmetrisch ... 12
transponierte ... 12
unitäre ... 12
Monomorphismus ... 42

N

Normaleneinheitsvektoren ... 29
Normalenvektoren ... 29
Normalformen ... 35

O

Orthonormalbasis ... 20

P

Parabel ... 35
positiv definit ... 20
Punktabbildung ... 26
Punkte ... 25

Q

Quadrik ... 35

R

Rang ... 7
Richtungsabbildung ... 26
Richtungsvektorraum ... 25
Rotationsmatrix ... 23

S

Skalarmultiplikation ... 13
Span ... 14
Spiegelungsmatrix ... 24
Spur ... 12
Standardskalarprodukt ... 19

T

Teilmenge
affin-unabhängige ... 31
Teilmengen
kongruente ... 31
Transformationsmatrix ... 18

U

Unterräume
parallele affine ... 28
Untervektorraum ... 14

V

Vektor ... 13
Vektoraddition ... 13
Vektorraum ... 13
endlich erzeugter ... 14
euklidischer ... 19
Verbindungsgerade ... 28
Verbindungsraum ... 28
Verschiebungsabbildung ... 25
Vielfachheit
algebraische ... 10
geometrische ... 10

W

Winkel ... 30

Literatur

[BMNW04] Barth, F. ; Mühlbauer, P. ; Nikol, F. ; Wörle, K: *Mathematische Formeln und Definitionen*. München : Bayerischer Schulbuchverlag und J. Lindauer Verlag, 2004.

[GM04] Grassmann, H. ; Mbunga, P.: *Lineare Algebra I*. Berlin, 2004. – Zugriff am 18.12.2014 unter http://www.mathematik.hu-berlin.de/~mbunga/uebung/lajg-script.pdf

[Hel13] Hellus, M.: *Lineare Algebra nicht-vertieft*. Berlin : Logos-Verlag, 2013.

[MK11] Modler, F. ; Kreh, M.: *Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1*. Heidelberg : Springer-Verlag, 2011.

[MK12] Modler, F. ; Kreh, M.: *Tutorium Analysis 2 und Lineare Algebra 2*. Heidelberg : Springer-Verlag, 2012.

[Sac15] Sacher, R.: *Examenskurs Analysis, lineare Algebra und analytische Geometrie (LG,LH,LR)*. Regensburg, 2014/2015.